Signal

Contents

Part I
Cours

1 Echantillonnage

Principe : On mesure le signal à intervalles de temps constant, on le discrétise. Cela revient à une périodisation du spectre dans le domaine des fréquences.

Théorème de Shannon-Nyquist Cette opération doit être réversible. Pour cela on a besoin, si f_e désigne la fréquence d'échantillonnage et f_0 celle du signal, $f_e > 2f_0$.

Point de vue pratique

Echantillonneur suiveur L'amplitude de chaque échantillon suit l'amplitude du signal à échantillonner.

Echantillonneur bloqueur L'amplitude reste constante mais cette méthode introduit une distorsion lors de la reconstitution du signal.

2 Signaux déterministes

(voire annexe pour les expressions)

Généralités On note le signal $x(t)$ et on lui associe sa transformée de Fourier $X(f)$ (si elle existe). Peut être à énergie ou puissance finie.

Energie E_x En général, les signaux d'énerge finie sont ceux à support temporel borné. Leur transformée de Fourier existe.

Densité spectrale d'énergie $S^e_{xx}(f)$ $E_x = \int_{\mathbb{R}} S^e_{xx}(f)df$

Fonction d'auto-corrélation R^e_{xx}

Puissance P_x E_x bornée $\Rightarrow P_x = 0$ (donc bornée)
Réciproque fausse !
De plus, si un signal est à puissance finie, sa transformée de Fourier n'existe pas toujours.

Densité spectrale de puissance $S^p_{xx}(f)$ $E_x = \int_{\mathbb{R}} S^e_{xx}(f)df$

Fonction d'auto-corrélation R^p_{xx}

3 Signaux aléatoire

Signaux que l'on ne peut connaître à l'avance, notés $x(t, \omega)$.

Moments

temporels

- Moyenne temporelle (ordre 1), notée $< x(t, \omega_0) >$
- Fonction d'autocorrélation temporelle (ordre 2), notée $< x(t, \omega_0), \overline{x}(t - \tau, \omega_0) >$

statistiques

- Moyenne statistique (ordre 1), notée $E[x(t,\omega_0)]$
- Fonction d'autocorrélation statistique (ordre 2), notée $R_{xx}(t,\tau) = E[x(t,\omega_0)\overline{x}(t-\tau,\omega_0)]$

Stationnarité et ergodicité

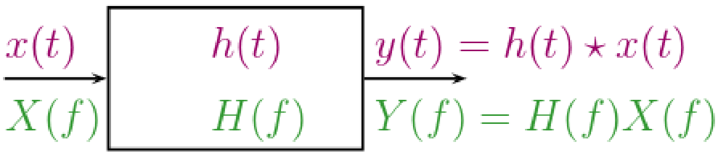
Stationnaire si la moyenne statistique ne dépend pas de t. Stationnaire au sens large si le second ordre ne dépend pas non plus de t.

Ergodique si la moyenne temporelle ne dépend pas de la variable aléatoire. Ergodique au sens large si le second ordre ne dépend pas non plus de la variable aléatoire.

Relation entre les deux sens large $\Rightarrow$ l'autre au premier ordre

Puissance moyenne d'un processus stationnaire et ergodique $P = E[|x^2|] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$

4 Filtrage linéaire et invariant dans le temps (FLIT)



- x(t) signal en entrée
- y(t) signal en sortie
- h(t) réponse impulsionnelle ($H(f)$ fonction de transfert)

Relations

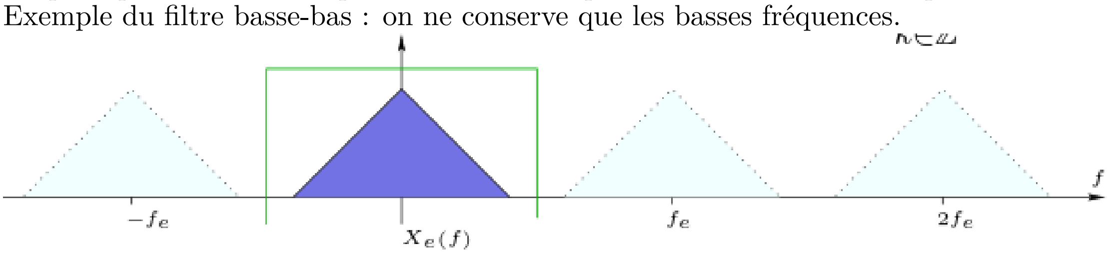
- $y(t) = x(t) \star h(t)$
- $Y(f) = X(f) \times H(f)$

Causalité et stabilité

Causalité Un filtre est dit causal si il est réalisable, càd $\Leftrightarrow \forall t < 0, h(t) = 0$

Stabilité Un filtre est dit stable si à toute entrée bornée il associe une sortie bornée, càd $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau < \infty$

Distorsion Un filtre ne distort pas si sa fonction de transfert est de la forme $H(f) = Ee^{-i2\pi f t_0}$
En pratique on considére qu'ils ne distordent pas dans une bande de fréquence donnée.
Exemple du filtre basse-bas : on ne conserve que les basses fréquences.



Filtrage des signaux Cette partie du cours est consacrée à la démonstration de nombreuses formules de l'annexe.

Modulation

Principe A partir d'un signal m(t) on cherche à obtenir un signal s(t) plus haut en fréquence (à bande étroite).

Signal analytique $Z_x = \{ \begin{matrix} 2X(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{matrix}$
$x(t) = \mathcal{R}e(z_x(t))$

Enveloppe complexe ξ_x ou γ_x $x(t) = \mathcal{R}e(\gamma_x e^{2i\pi f_0 t})$

5 Signaux à temps discret

Principe C'est un signal qui a été discrétisé (au moyen d'un échantillonnage)

Transformée en Z Outil principal, $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$
ATTENTION aux domaines de convergence pour toutes ces séries. Elles convergent en général sur un disque ouvert.

Filtrage On a encore :

- $y(k) = x(k) \star h(k)$
- $Y(z) = X(z) \times H(z)$

Ici, H(z) est une fraction rationnelle $\Rightarrow$ relation de récurrence entre les $y(k)$ et $x(k)$

Relation causalité-stabilité Un filtre causal est stable ssi tous les pôles de H[z] sont à l'intérieur du cercle unité.

Part II
Autres remarques

Modèle du bruit blanc Modèle mathématique (puissance infinie donc non réel) étant représenté par une droite constante dans le domaine des fréquences.

Produit de convolution

- cas continu : $(f \star g)(x) = \int \mathcal{R} f(t) \dot{g}(x-t) dt$
- cas discrret : $(f \star g)(n) = \sum_{m \in \mathcal{Z}} f(m) g(n-m)$

TOUJOURS FAIRE ATTENTION AUX DOMAINES DE DEFINITION surtout dans le cas discret

Autres conseils savoir représenter le spectre, revoir les fonctions usuelles (ex : peigne de Dirac) et reprendre les slides des amphis des intervenants disponibles sur le site : http://www-public.it-sudparis.eu/~castella/index.php?page=enseignement