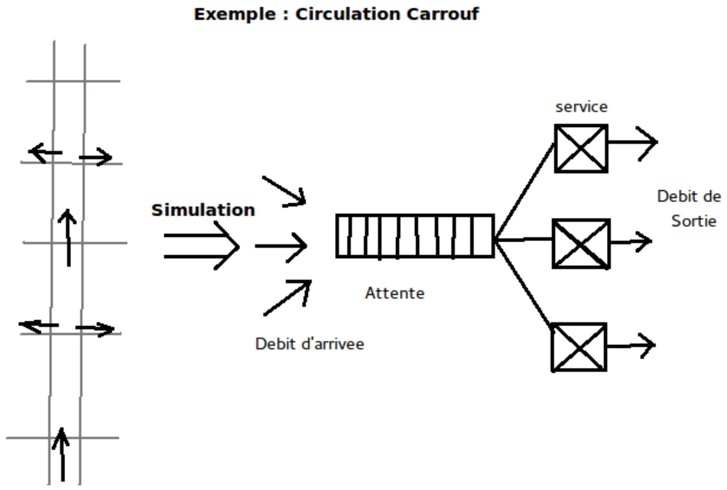
Fiche de Mathématiques

Contents

Part I
Introduction

1 Motivations

Évaluation des performances On veut, à partir du modèle réel, créer un modèle virtuel afin d'en étudier les performances et ainsi améliorer les performances de la réalité. Pour ce faire on créé des modèles de file d'attente.



2 Critères de performance

Le temps de réponse C'est l'espérance mathématique du temps séparant l'arrivée d'une requête de la fin de son traitement.

$$\mathbf{Treponse} = \mathbf{Tattente} + \mathbf{Tservice}$$

Le débit C'est l'espérance mathématique du nombre de requêtes traitées par unité de temps.
Exemple, débit internet :
-requête = 1Mo
-unité de temps = 1s
-soit débit = nbMo/s

Le taux d'occupation Probabilité pour qu'une ressource soit occupée, c'est à dire, La probabilité qu'une ressource soit en train de traiter une requête à un instant t donné.

Le taux de perte des paquets Probabilité pour qu'un paquet soit perdu. La perte d'un paquet peut se produire, par exemple, lorsque la file d'attente est pleine, le paquet est alors rejeté.

$$\mathbf{TauxDePerte} = mesure\left[\frac{\mathbf{nbPaquetPerdu}}{\mathbf{nbPaquetEnvoy\acute{e}}}\right]$$

$$\mathbf{ProbaPerte} = E[1/\mathbf{perte}]$$

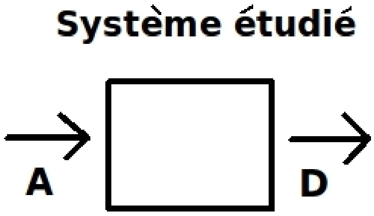
Remarque importante On s'intéressera, mathématiquement, surtout à des mesures générales, comme des probabilités ou des espérances qui permettent de définir des performances dans le cas général. (voir petit exemple page 11/94)

Part II
Analyse opérationnelle

On s'intéresse ici à des mesures élémentaires que l'on effectue sur un systeme informatique. A partir de ces mesures on calcul un ensemble de critères de performance qui permettent de quantifier les performances du systeme.

1 Formule de Little opérationnelle

Définition du système Le système, ici, est un mécanisme recevant des requêtes et les restituants à l'issue d'un certain temps de traitement. (le systeme peut contenir des requêtes non traitées) On connait le système grâce à deux compteurs :
-le nombre total d'entrées
-le nombre total de sorties



Mesures élémentaires considérées

1. T : durée de la mesure
2. A : nombre total d'arrivées de requêtes
3. D : nombre total de départs de requêtes
4. $T(n)$: durée cumulée pendant laquelle le système a contenu n requêtes lors de cette mesure
5. n_{max} : nombre maximum de requêtes dans le système

Critères de performances

1. $\bar{\Lambda}$: débit du système (à la sortie) : $\bar{\Lambda} = \frac{D}{T}$
2. $\bar{L}$: nombre moyen de requêtes dans le système : $\bar{L} = \frac{\sum_{1}^{n_{max}} n.T(n)}{T}$
3. $\bar{R}$: temps de réponse moyen du système : $\bar{R} = \frac{\sum_{1}^{n_{max}} n.T(n)}{D}$

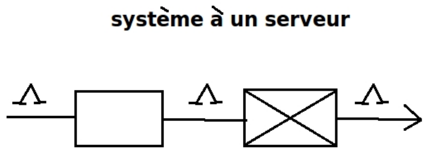
Formule de Little

$$\boxed{\bar{L} = \bar{\Lambda}.\bar{R}}$$

(Cf exemple du modèle du dentiste)

2 Système à un serveur

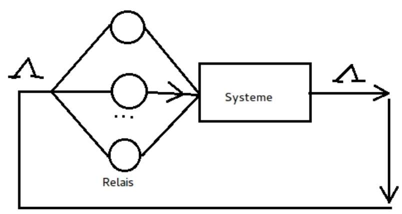
Définition du système $U = \text{P}[\text{serveur occupé}] = $ taux d'utilisation du serveur (si un seul serveur)



On applique la **Loi de Little** au service :
-S : Le temps de service
-nb de clients, 0 si serveur inoccupé $(1-U)$
-nb moyen de clients $= 0 \times (1-U) + 1 \times U = U$
soit : $\bar{U} = \bar{\Lambda}\bar{S}$ et $U = \bar{\Lambda}E[S]$

3 Modèle de réseau fermé

Définition du système on a N le nombre de client (constant)



Le processus passe alternativement par deux phases :
-réflexion : l'utilisateur créé sa requête
-traitement : la requête est traitée.

Mesures élémentaires considérées

1. T : durée de la mesure
2. N : nombre de terminaux connectés
3. A : nombre total d'arrivées de requêtes
4. D : nombre total de départs de requêtes
5. $r(k)$: durée cumulée passée en traitement par le processus k
6. $z(k)$: durée cumulée en réflexion par le processus k

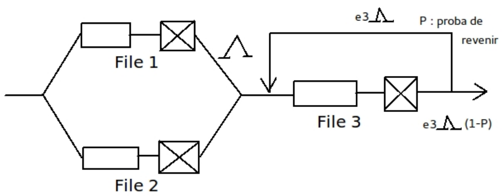
Critères de performances

1. $\bar{\Lambda}$: débit du système (à la sortie) : $\bar{\Lambda} = \frac{D}{T}$
2. $\bar{Z}$: temps de réflexion moyen sur les terminaux : $\bar{Z} = \frac{\sum_{1}^{N} z(k)}{A}$
3. $\bar{R}$: temps de réponse moyen du système : $\bar{R} = \frac{\sum_{1}^{N} r(k)}{D}$

Temps de réflexion dans un système interactif $\boxed{\bar{R} = \frac{N}{\bar{\Lambda}} - \bar{Z}}$

4 Relations d'équilibre d'un système

Définition du système On a le système suivant :



Mesures élémentaires considérées

1. T : durée de la mesure
2. D : nombre total de requête globales sorties du système
3. D_i : nombre total de requêtes élémentaires traitées par la station i
4. $T_i(n)$: durée cumulée pendant laquelle la station i a contenu n requêtes élémentaires

Critères de performances

1. $\overline{\Lambda_i}$: débit de la station i (au niveau des requêtes élémentaires) : $\overline{\Lambda_i} = \frac{D_i}{T}$
2. $\overline{U_i}$: taux d'occupation de la station i (proportion de temps pendant lequel la station n'est pas vide) : $\overline{U_i} = \frac{T - T_i(0)}{T}$
3. $\overline{S_i}$: durée moyenne de service à la station i : $\overline{S_i} = \frac{T - T_i(0)}{D_i}$
4. $\overline{e_i}$: nombre moyen de visite à la station par travail : $\overline{e_i} = \frac{D_i}{D}$
5. $\overline{R_i}$: temps de réponse de la station i : $\overline{R_i} = \sum n.\frac{T_i(n)}{D_i}$
6. $\overline{L_i}$: nombre moyen de requêtes élémentaires dans la station i : $\overline{L_i} = \sum n.\frac{T_i(n)}{T}$
7. $\overline{\Lambda}$: débit global du système (au niveau des travaux) : $\overline{\Lambda} = \frac{D}{T}$

Identité On en déduit :

$$\boxed{\overline{\Lambda} = \frac{\overline{\Lambda_i}}{\overline{e_i}} = \frac{\overline{U_i}}{\overline{S_i}.\overline{e_i}} = \frac{\overline{L_i}}{\overline{R_i}.\overline{e_i}}}$$

et : $e_3 = \frac{1}{1-p}$

5 Notations importantes

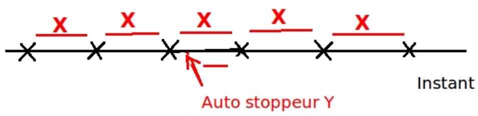
Notations :

1. S : Temps de service (temps passé par un client dans le serveur)
2. U : Taux d'occupation du serveur (probabilité pour que ce dernier soit occupé)
3. Λ : Débit du système à la sortie
4. L : Nombre de clients dans le système (serveur et file d'attente)
5. R : Temps de séjour dans le système (somme du temps d'attente et du temps de service)

Part III
Temps d'attente résiduel & Lois de probabilité

1 Temps d'attente residuel

Définition du système On a une série de voiture et un auto stoppeur. On veut connaitre à un instant t la durée avant la prochaine arrivée. Y la durée résiduelle d'attente pour le piéton, durée séparant son arrivée de l'arrivée du premier bus/voiture.



on a les cas :
-$E[Y] = E[X]$
-$E[Y] < E[X]$ (pas toujours vrai)

Formule de Pollaczek Khinchine $\boxed{E[Y] = E[X]\left(\frac{1+C^2[X]}{2}\right)}$ avec $C^2[X] = \frac{Var[X]}{E[X^2]}$
On peut avoir $E[Y] > E[X]$ car les intervalles X ne sont pas forcément réguliers.

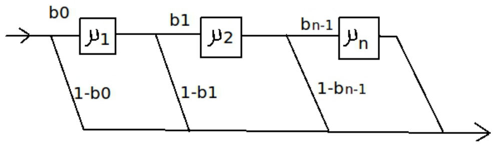
Voiture à intervalle regulier $X = cste$ d'où, $E[X] = X$ et $E[Y] = X/2$

repartition exponentielle $C^2[X] = 1$ et $\sigma^2[X] = (E[X])^2$
X est sans mémoire. On arrive à un instant quelconque et le temps au bout duquel un événement se produit a la même distribution que le temps séparant 2 événements successifs. Pas besoin de savoir ce qui s'est passé avant.

Arrivées uniformément réparties $C^2[X] > 1$ et $E[Y] > E[X]$
Si les arrivées sont uniformément réparties, on a 2 intervalles (un grand et un petit). On a une probabilité plus forte d'arriver dans le grand intervalle plutôt que dans le petit.

2 Lois de probabilité

Loi de cox Si on considère dans une file d'attente que le service suit une loi de Cox, on peut décomposer le service en réseau de services de la façon suivante :



Mais il n'y qu'un seul client à la fois dans l'ensemble du réseau. On a le temps d'attente r avec une densité de probabilité $f(t)$ dont la transformée de Laplace :

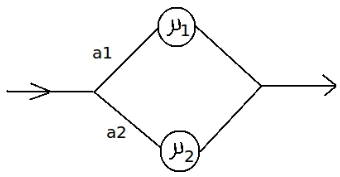
$$f^{(z)} = \int_0^\infty e^{-z.t} f(t)dt \text{ vérifie } f^{(z)} = (1-b_0) + \sum_{i=1}^{n} (1-b_i).a_i \Pi_{j=1} \left(\frac{\mu_j}{z+\mu_j} \right)$$

avec :

$$a_1 = b_0.b_1.b_2...b_{i-1} \quad E[\tau] = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mu_i} \quad Var[\tau] = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mu_i^2}$$

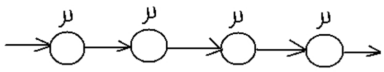
Loi exponentielle On a les variables comme pour une loi de probabilité exponentielle (Cf pougne de Proba)

Loi hyper-exponentielle Cette fois on a :



On prend les deux lois exponentielles en parallèle : $x_1 = \frac{1}{\mu_1}$ et $x_2 = \frac{1}{\mu_2}$
la densité est : $f(x) = a_1.\mu_1.e^{-\mu_1 x} + a_2.\mu_2.e^{-\mu_2 x}$
Carré du coefficient de variation : $C^2 = 1 + 2.a_1.\frac{a_2.(x_1-x_2)^2}{(a_1.x_1+a^2.x^2)^2} \leq 1$

Loi d'Erlang Cette loi correspondà la situation où on a r lois exponentielles en série



-La moyenne : $E[X] = \frac{r}{\mu}$
-Carré du coefficient de Variation : $C^2 = \frac{1}{r}$

Loi de Poisson (cf pougne de proba)

Part IV
Chaînes de Markov

Un processus stochastique est une famille de Variables Aléatoires $\{\mathcal{X}_t, t \in T\}$ définie sur un même espace de probabilité et indexée par $t \in T$ (t est le paramètre "temps").

1 Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)

Définition

-E : espace d'état. Les états sont numérotés $\{1, 2, ..., k, ...\}$
-$\{\mathcal{X}_n, n \in N\}$ une chaîne à valeur dans E.
C'est une chaîne de markov si la probabilité que l'état soit j en $t = n+1$ est connue lorsque l'état i_n en $t = n$ est connu.

$$\boxed{P(X_{n+1} = j/X_1 = i_1 \cap X_2 = i_2 \cap ...X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j/X_n = i_n)}$$

Notations

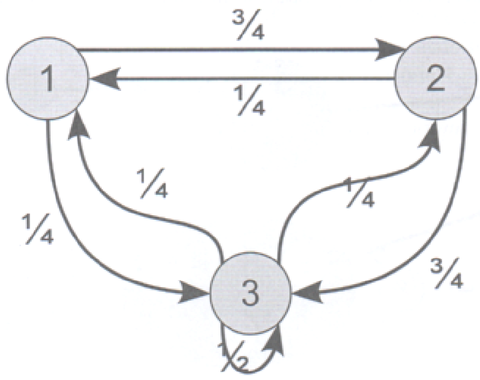
$\boxed{P_{ij} = P(X_{n+1} = j/X_n = i)}$: Probabilité de transition

$\boxed{P_{ij}^{(n)} = P(X_{r+n} = j/X_r = i)}$: probabilité d'aller de i à j en n étapes

$$\text{on a : } P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in E} P_{ij}^{(n-1)}.P_{kj}$$

Représentation des probabilités de transition

1. les noeuds correspondent aux états
2. les arcs correspondent aux transitions entre états

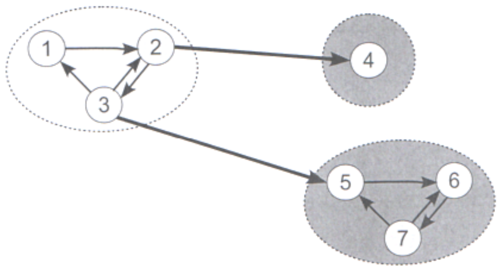


On a la matrice stochastique : $P = [P_{ij}].P^{(m)} = [P_{ij}^{(m)}]$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Distributions Notons $\Pi_j^{(n)} = P(X_n = j)$ et $\Pi^{(n)} = (\Pi_1^{(n)}, ...\Pi_j^{(n)}, ...)$ la distribution à l'instant n. Il s'agit de la loi de X_n.
On a : $\boxed{\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)}.P}$
En notant $\Pi^{(0)}$ la distribution initiale, on a : $\Pi^{(n)} = \Pi^{(0)}.P^n$

Chaînes de Markov irréductible C'est une chaîne dont tous ses états peuvent êtres atteints, depuis tout autre état, au bout d'un nombre fini de pas, avec une probabilité non nulle. Le graphe doit être fortement connexe.



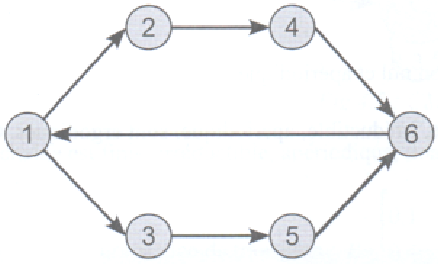
Classification des états Soit :
-$f_j^{(n)}$ la probabilité pour que le premier retour en j, après un départ de j, se produise au bout de n pas.
$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ la probabilité de repasser en j, étant parti de j.

Définition :

- Si $f_j = 1$ on dit que j est récurrent : on reviendra toujours en j
- Si $f_j < 1$ on dit que j est transitoire

De plus, si j est récurrent, on définit le temps moyen de retour en j : $M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n.f_j^{(n)}$.

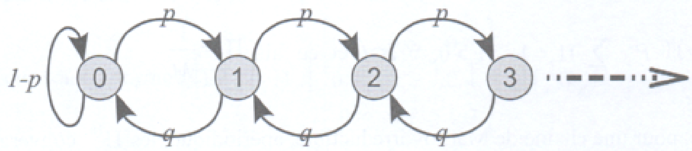
- Si $M_j = \infty$, j est récurrent nul
- Si $M_i < \infty$, j est récurrent non nul



Il s'agit d'une chaîne irréductible.
Tous les états sont récurrents non nuls
de période 4.

Exemple de chaîne périodique

Exemple de la chaîne de Markov suivante :



Chaîne infinie

- Si on a un nombre fini d'états, ils sont tous réccurrents non nuls.
- Si on a un nombre infini d'états :
  1. $p > q$ les états sont transitoires.
  2. $p = q$ les états sont récurrents nuls.
  3. $p < q$ les états sont récurrents non nuls.

Théorème 1 Les états d'un chaîne de Markov irréductibles sont :

- soit tous transitoires, soit tous récurrents nuls, soit tous récurrents non nuls,
- soit tous apériodiques, soit tous périodiques de même période.

Les états d'une chaîne de Markov finie irréductible sont tous récurrents non nuls.

Définition de l'ergodicité Un état e_j est ergodique s'il est récurrent non nul et apériodique.

Théorème 2 Pour une chaîne de Markov ergodique, il existe une distribution limite $\Pi_i = \lim_{n\to\infty} \Pi_i^{(n)}$. C'est une distribution stationnaire indépendante de la distribution initiale.

$$\text{Elle vérifie : } \Pi = \Pi.P, \sum \Pi_i = 1 \quad \Pi_i > 0, \forall i \in E \text{ et, en fait,} \Pi_i = \frac{1}{M_i}$$

Dans tous les cas, pour une chaîne de Markov irréductible, apériodique, les $\Pi_j^{(n)}$ convergent. Si les états sont transitoires ou récurrents nuls, $\Pi_j = 0$. Dans tous les cas, Π_j est la limite de la proportion du temps passé dans l'état j pour une dureé tendant vers l'infini.

Convergence Si la chaîne de Markov est **irréductible, récurrente positive et apériodique**, alors P^k **converge** vers une matrice dont chaque ligne est l'unique distribution stationnaire Π. On note, si elle existe :

$$\boxed{\Pi^\infty = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}}$$

(Cf exemple de Doudou le Hamster)

Théorème de convergence

1. Chaîne périodique ⇒ pas de convergence
2. Chaîne réductible ⇒ pas de convergence
3. chaîne apériodique et irréductible :
   - convergente : $\Pi = \Pi P$ a une solution Π non nulle.
   - non convergente : $\Pi = \Pi P$ n'a que la solution nulle

Conséquence : Si la chaîne est finie, apériodique et irréductible ⇒ convergente.

2 Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

Définition $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est une chaîne de Markov à temps continu si:
$\forall (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $t_1 < t_2 < ... < t_n$, et $\forall (i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$ on a:

$$P(X_{t_n} = j / X_t = i, ..., X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P(X_{t_n} = j / X_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

Distribution Soir les probabilités : $p_{ij}(s,t) = P(X_t = j / X_s = i)$ et $H_{s,t} = [p_{ij}(s,t)]$ la matrice de transition. De plus, notons $Q(t) = \lim_{\Delta_t \to 0} \dfrac{H(t, t+\Delta_t) - I}{\Delta_t}$ le générateur infinitésimal de la matricede transition.
En posant : $\Pi_i(t) = P(X_t = i)$ et $\Pi(t) = (\Pi_1(t) ... \Pi_k(t) ...)$
On obtient au final pour la distribution :

$$\boxed{\Pi(t) = \Pi(0).H(0,t) \text{ soit } \Pi(t) = \Pi(0) e^{\int_0^t Q(u)du}}$$

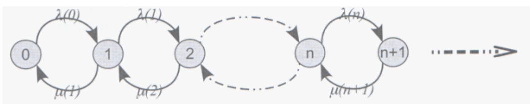
Théorème 3
Pour une chaîne de Markov à temps continu,homogène, irréductible, il y a bien convergence de $\Pi(t)$ quand t tend vers l'infini.

- états récurrents nuls ou transitoires $\Pi_i(t) \to 0, \forall i$
- états récurrents non nuls, il existe une distribution stationnaire Π telle que

$$\lim_{t \to \infty} \Pi(t) = \Pi \text{ vérifiant } \Pi.Q = 0 \text{ et } \sum \Pi_i = 1$$

- Dans tous les cas Π_i est la limite de la proportion du temps passé en i, pour une durée totale tendant vers l'infini.

Processus de naissance et de mort Processus de Markov où on ne peut passer de l'état n que dans l'état $n+1$ (naissance), ou $n-1$ (mort).



Limite stationnaire ? :

$$P(n) = \frac{\lambda(n-1)\lambda(n-2)...\lambda(0)}{\mu(n)\mu(n-1)...\mu(1)} P(0) \quad \textbf{(1)}$$

Soit série est convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad \textbf{(2)}$$

Théorème 4 Pour un processus de naissance et de mort, s'il y a convergence, la probabilité détat est solution du système (1),(2).