# Exemple file d'attente

13 mars 2015

## Table des matières

Première partie
# Analyse opérationnelle

## 1 Modèle du dentiste

(Correction exercice 1.1 poly exercices)

### Solution

$u$ =Probabilité[serveur occupé]
$\Lambda = \frac{\text{nombre client arrivant}}{\text{unité temps}}$

1. On a les relations :
   (a) $E[R] = E[V] + E[S]$
   (b) $E[L] = E[L_W] + E[L_S]$
2. La loi de Little nous donne :
   -$E[L] \quad = \Lambda E[R]$
   -$E[L_W] = \Lambda E[W]$
   -$E[L_S] = \Lambda E[S]$
   Soit : $(a) = \frac{1}{\Lambda}(b)$
3. $L_S$ :
   **1,** $u$
   **0,** $1 - u$
   $E[L_S] = 1 \times u + 0 \times (1 - u)$
   $E[L_S] = u$
4. La question 2 nous donne : $U = \Lambda E[S]$
5. On a :
   $E[L] = 2,8$
   $E[L_W] = 2$
   $\Lambda = 4$
   $E[L_S] = E[L] - E[L_W] = 0,8$
   $E[R] = \frac{1}{\Lambda}E[L] \approx 0,7h = 42min$
   $E[W] = \frac{1}{\Lambda}E[L_W] = \frac{1}{2}h = 30min$
   $E[S] = E[R] - E[W] = 12min$

$$\boxed{u = 0,8}$$

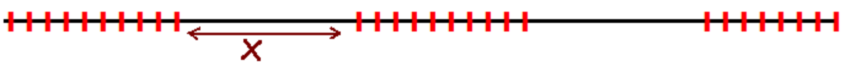
## Deuxième partie
# Temps d'attente résiduel

## 1 Temps d'attente d'un train

(Correction exercice 1.2 poly exercices)

**Solution**

Un individu arrive à un instant quelconque




On a les paramètres :
- $E[X]$
- $\sigma^2[X]$
- $[Z]$ = largeur de l'intervalle dans lequel il arrive.

Pourquoi $P[Zgrand]$ augmente avec la durée $Z$, $P[Z = z]$ augmente avec z.
Proportionnalité entre $f_Z$ et la largeur de l'intervalle

$$f_Z(x) = Kxf_X(x)$$

$$\int f_Z(x)dx = \int Kxf_X(x)dx = 1$$

$$E[Z] = \int xf_Z(x)dx = \frac{1}{E[X]}\int x^2 f_X(x)dx = \frac{E[X^2]}{E[X]}$$

$$\text{Or } \sigma^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 \text{ D'où } \frac{E[X^2]}{E[X]} = \frac{\sigma^2[X] + E[X]^2}{E[X]} = \frac{\sigma^2}{E[X]} + E[X]$$

On a montré que :

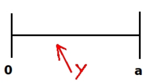
$$E[Z] = E[X]\left(1 + \frac{\sigma^2[X]}{E[X]^{*2}}\right)$$

On veut E[Y] où $Y$ le temps d'attente residuel, $Y$ pris uniformément entre 0 et $Z$ donc $E[Y] = \frac{E[Z]}{2}$ d'où :

$$\boxed{E[Y] = E[X]\left(\frac{1+C^2[X]}{2}\right)}$$

De plus : $F_Y(z) = 1_{[0,z]}$ et $f_Y(z) = \frac{1}{z}$ D'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf_Y(x)dx = \int_0^z 1dx = z$$




$$F_Y(y) = f_Y(y)1_{[0,a]} = \frac{1}{a}1_{[0,a]}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^a \frac{y}{a}dy = \frac{a^2}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{a}{2}$$

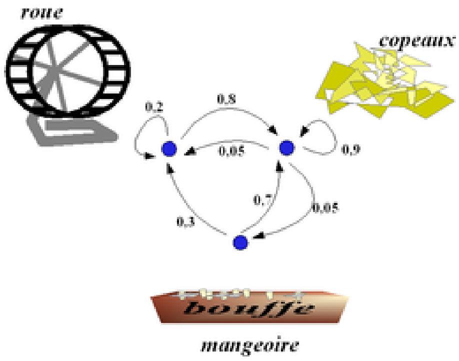
$$E[Y] = \frac{a}{2} = \frac{E[Z]}{2} = \frac{E[X]}{2}(1 + C^2[X]) = \frac{E[X^2]}{2E[X]}$$

Troisième partie

# Chaînes de Markov

## 1 Doudou le Hamster

**Problème** Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire.




On cherche à étudier la convergence de la chaîne de Markov, c'est à dire, les probabilités qu'a Doudou de se retrouver dans chaque état indépendamment de l'état initial.

**Solution** On a la matrice de transition du système : $P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$

Prenons l'hypothèse que Doudou dort lors de la première minute de l'étude. $\Pi^{(0)} = [1, 0, 0]$
Au bout d'une minute on peut prédire que :

$$\Pi^{(1)} = \Pi^0 P = [0.9, 0.05, 0.05]$$

Ainsi, après une minute, on a 90% de chances que Doudou dorme encore, 5 % qu'il mange et 5% qu'il courre.
La théorie montre qu'au bout d'un certain temps, la loi de probabilité est indépendante de la loi initiale. Notons-la $q$ :

$$\mathbf{q} = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}$$

On obtient la convergence si et seulement si la chaîne est apériodique et irréductible. C'est le cas dans notre exemple. On a donc :

$$\boxed{[q_1, q_2, q_3] = [0.884, 0.0442, 0.0718]}$$

Doudou passe 88,4% de son temps à dormir !

Quatrième partie

# Modèle à file simple

## 1 Application du modèle de base à un processus de naissance et de mort

(Cf page 51/52/53 du poly)

## 2 Modèle M/M/1

(cf page 55/56 poly)

**Caractéristiques**

— M : arrivées poissonniennes, taux $\lambda$

— M : services exponentiel, taux $\mu$

— 1 : un serveur

La probabilité pour qu'il y ait $k$ arrivées dans un intervalle de durée $T$ est : $P_k = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}$

**Si stabilité**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{débit de sortie} & = \lambda \\ \text{débit de sortie} & = \mu \text{ lorsque le serveur travaille} \\ . & = 0 \text{ lorsque le serveur ne travaille pas} \end{array}\right\} \text{en moyenne } \lambda$$

## 3 Modèle M/M/1/N

$\boxed{\Pi(i) = p^i \Pi(0)}$

**stable pour $i \leq N$**

| | | |
|---|---|---|
| $p = 1$ | $\sum_{i=0}^{N} \Pi(i) = 1$ | $\Rightarrow$ les $\Pi(i)$ sont tous égaux à $\frac{1}{N+1}$ |
| $p > 1$ | $\Pi(i) = p^1 \Pi(0)$ | $\Rightarrow \Pi(0) = \frac{(1-p^{N+1})}{1-p}$ |
| $p < 1$ | $\sum_{i=0}^{+N} p^i = \frac{1-p}{1-p^{N+1}}$ | $\Rightarrow \Pi(i) = p^i \Pi(0)$ |

P(rejet)=P(quand arrive voie la file pleine)=P(file pleine)

PASTA : arrivées de Poisson voient la file dans un état moyen.

$$\boxed{P(rejet) = \Pi(N) = \frac{1-p^{N+1}}{1-p} p^N}$$

## 4 Modèle M/D/1

N(t) est-il sans mémoire ?

N(t)=i events possibles ?

$$\begin{array}{lll} \text{arrivées sans mémoire} & i \to i+1 & \text{ne pose pas de pb} \\ & i \to i-1 ? & \text{fin de service ?} \end{array}$$

définie si on connait le temps depuis lequel le service est commencé : le temps de service residuel $\neq$ temps de service

$(N(t) = i, \sum(t) = \theta)$