Part I
Analyse opérationnelle

1 Modèle du dentiste

(Correction exercice 1.1 poly exercices)

Solution

u =Probabilité[serveur occupé]
$\Lambda = \frac{\text{nombre client arrivant}}{\text{unité temps}}$

1. On a les relations :
   (a) $E[R] = E[V] + E[S]$
   (b) $E[L] = E[L_W] + E[L_S]$
2. La loi de Little nous donne :
   -$E[L] \quad = \Lambda E[R]$
   -$E[L_W] = \Lambda E[W]$
   -$E[L_S] = \Lambda E[S]$
   Soit : $(a) = \frac{1}{\Lambda}(b)$
3. L_S :

   1, u

   0, $1 - u$

   $E[L_S] = 1 \times u + 0 \times (1 - u)$
   $E[L_S] = u$
4. La question 2 nous donne : $U = \Lambda E[S]$
5. On a :
   $E[L] = 2,8$
   $E[L_W] = 2$
   $\Lambda = 4$
   $E[L_S] = E[L] - E[L_W] = 0,8$
   $E[R] = \frac{1}{\Lambda}E[L] \approx 0,7h = 42min$
   $E[W] = \frac{1}{\Lambda}E[L_W] = \frac{1}{2}h = 30min$
   $E[S] = E[R] - E[W] = 12min$

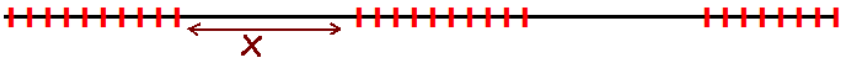
$$\boxed{u = 0,8}$$

Part II
Temps d'attente résiduel

1 Temps d'attente d'un train

(Correction exercice 1.2 poly exercices)

Solution
Un individu arrive à un instant quelconque



On a les paramètres :

- $E[X]$
- $\sigma^2[X]$
- $[Z]$ = largeur de l'intervalle dans lequel il arrive.

Pourquoi $P[Z grand]$ augmente avec la durée Z, $P[Z=z]$ augmente avec z.
Proportionnalité entre f_Z et la largeur de l'intervalle

$$f_Z(x) = Kxf_X(x)$$

$$\int f_Z(x)dx = \int Kxf_X(x)dx = 1$$

$$E[Z] = \int xf_Z(x)dx = \frac{1}{E[X]}\int x^2 f_X(x)dx = \frac{E[X^2]}{E[X]}$$

$$\text{Or } \sigma^2[X] = E[X^2] - E[X]^2 \text{ D'où } \frac{E[X^2]}{E[X]} = \frac{\sigma^2[X] + E[X]^2}{E[X]} = \frac{\sigma^2}{E[X]} + E[X]$$

On a montré que :

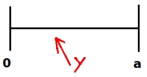
$$E[Z] = E[X]\left(1 + \frac{\sigma^2[X]}{E[X]^{*2}}\right)$$

On veut E[Y] où Y le temps d'attente residuel, Y pris uniformément entre 0 et Z donc $E[Y] = \frac{E[Z]}{2}$ d'où :

$$\boxed{E[Y] = E[X]\left(\frac{1+C^2[X]}{2}\right)}$$

De plus : $F_Y(z) = 1_{[0,z]}$ et $f_Y(z) = \frac{1}{z}$ D'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf_Y(x)dx = \int_0^z 1dx = z$$



$$F_Y(y) = f_Y(y)1_{[0,a]} = \frac{1}{a}1_{[0,a]}$$

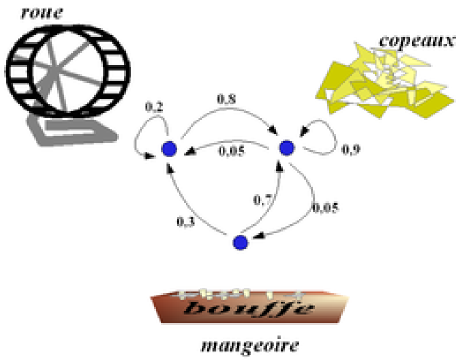
$$\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^a \frac{y}{a}dy = \frac{a^2}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{a}{2}$$

$$E[Y] = \frac{a}{2} = \frac{E[Z]}{2} = \frac{E[X]}{2}(1 + C^2[X]) = \frac{E[X^2]}{2E[X]}$$

Part III
Chaînes de Markov

1 Doudou le Hamster

Problème Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire.



On cherche à étudier la convergence de la chaîne de Markov, c'est à dire, les probabilités qu'a Doudou de se retrouver dans chaque état indépendamment de l'état initial.

Solution On a la matrice de transition du système : $P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$

Prenons l'hypothèse que Doudou dort lors de la première minute de l'étude. $\Pi^{(0)} = [1,0,0]$
Au bout d'une minute on peut prédire que :

$$\Pi^{(1)} = \Pi^0 P = [0.9, 0.05, 0.05]$$

Ainsi, après une minute, on a 90% de chances que Doudou dorme encore, 5 % qu'il mange et 5% qu'il courre.
La théorie montre qu'au bout d'un certain temps, la loi de probabilité est indépendante de la loi initiale. Notons-la q :

$$\mathbf{q} = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}$$

On obtient la convergence si et seulement si la chaîne est apériodique et irréductible. C'est le cas dans notre exemple. On a donc :

$$\boxed{[q_1, q_2, q_3] = [0.884, 0.0442, 0.0718]}$$

Doudou passe 88,4% de son temps à dormir !