

Les Mathématiques Financières

Yosra BEJAR

Maître de Conférences

Mél : yosra.bejar@it-sudparis.eu





Les principes d'actualisation et de capitalisation

- 1- les opérations à plusieurs flux
- 2- les principes d'actualisation et la valeur présente
- 3- Le taux de rentabilité interne
- 4- Quel taux d'actualisation ?



Principes de base

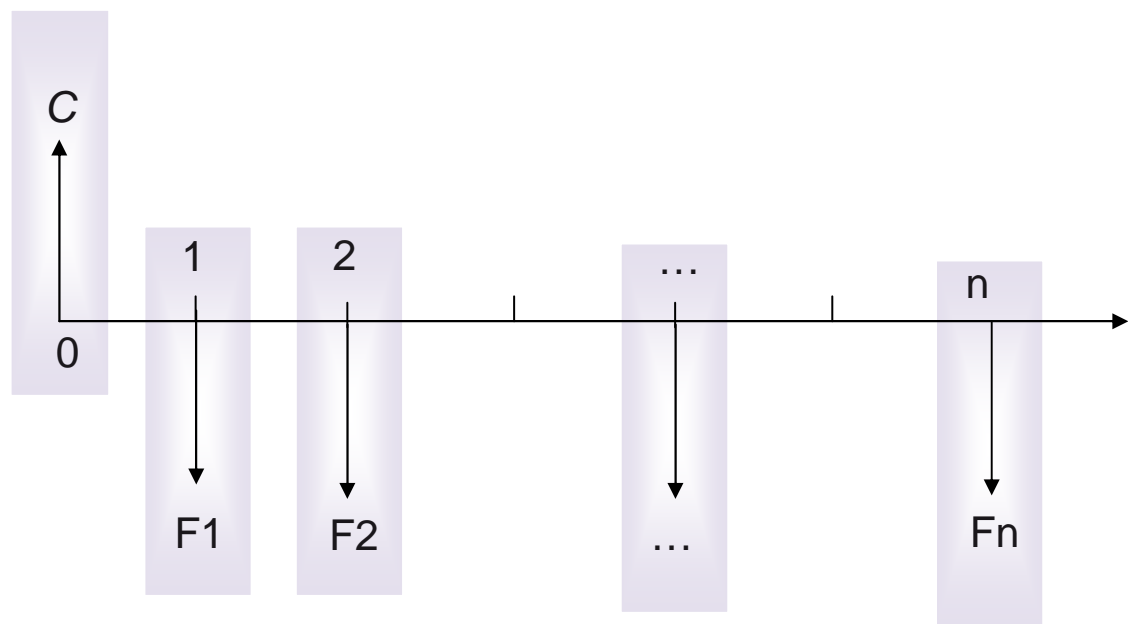
Dans l'analyse des opérations à plusieurs flux :

- Le temps est décomposé en **périodes de même durée** (mois, trimestre, année, ...).
- Chacune des périodes donne lieu à une **rentrée** ou une **sortie** d'argent **nette unique** (égale à la somme algébrique des rentrées et sorties de cette période).



Opérations à plusieurs flux

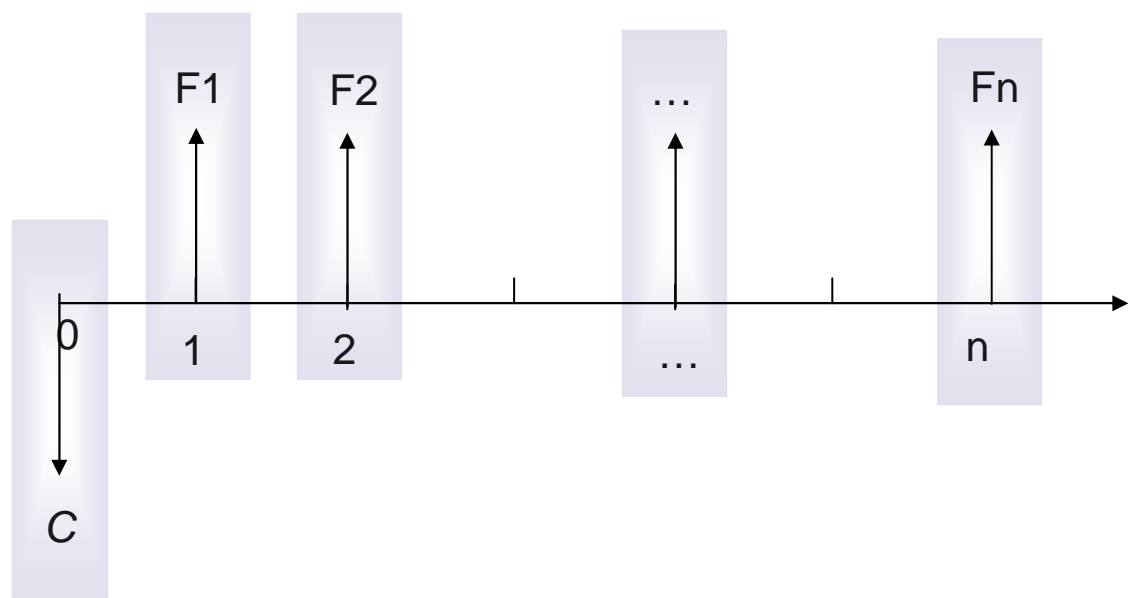
Cas de l'emprunt, du prêt ou encore du financement





Opérations à plusieurs flux

Cas du placement ou encore de l'investissement





Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Comparer les opérations à plusieurs flux

Comparons deux investissements différents caractérisés par des flux distincts aux différentes périodes.

Instants	0	1	2	3	4
A	- 500	100	150	200	250
B	- 350	250	100	75	125

Lequel des deux est préférable à l'autre ?



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Principe d'actualisation

Une méthode de choix consiste à "actualiser" les deux séries de flux A et B :

Pour simplifier les calculs, supposons que l'investisseur puisse prêter et emprunter à sa guise à un taux unique r (nous l'appellerons taux d'actualisation).

La méthode consiste à

- Remplacer les différents flux des différentes périodes par des flux se produisant tous aujourd'hui (ils seront tous **"en euros d'aujourd'hui"**)
- Calculer la somme algébrique de ces flux se produisant tous à la date initiale et caractériser chaque investissement par le résultat ainsi obtenu (qui pourra être positif ou négatif).



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Principe d'actualisation

Disposer de a_t à l'instant t équivaut à disposer de $\frac{a_t}{(1+r)^t}$ à l'instant 0.

Démonstration

$$\frac{a_t}{(1+r)^t}$$
$$\frac{a_t}{(1+r)^t} * (1+r)^t = a_t$$



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Valeur présente

$\frac{a_t}{(1+r)^t}$ est appelée la "**valeur actuelle**" (ou "**valeur présente**" ou encore "**valeur actualisée à l'instant 0**") du flux a_t

Où r est le **taux d'actualisation**.

Selon le même principe, on peut démontrer que payer a_t

à l'instant t équivaut à payer $\frac{a_t}{(1+r)^t}$ l'instant 0



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Exemple

Nous sommes le premier juillet 2005. Un particulier a souscrit un emprunt qui lui impose de rembourser 2000€ le 1^{er} juillet 2007. Il souhaite se débarrasser dès aujourd'hui de cette dette en remboursant de façon anticipée son emprunt. Sachant que le taux annuel d'emprunt et de prêt en vigueur est de 3%, à combien devrait s'élever le montant du remboursement anticipé?

Réponse :

On actualise le montant emprunté; le particulier devra rembourser :

$$\frac{2000}{(1+3\%)^2} \text{ €}, \text{ soit } 1885,19\text{€ au premier juillet 2005.}$$



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

La Valeur Présente d'une séquence

Considérons maintenant un investissement générant une séquence de flux $\{F_0, F_1, \dots, F_n\}^*$;

La VP (valeur présente) de cette séquence de flux est donnée par la formule :

$$VP = F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

(F_0 étant le flux de la période 0, n'a pas à être actualisé).

*rappelons que les F_t sont positifs ou négatifs selon qu'ils représentent des encaissements ou des décaissements (dans le cas d'un investissement F_0 est négatif, et représente la mise de fonds initiale).



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Simplification par la suite géométrique

Dans certains cas, le calcul peut être simplifié en utilisant les propriétés des suites géométriques

Considérons en effet le cas particulier d'une séquence de flux qui ont tous la même valeur. Supposons que cette valeur soit de 1 €. La valeur présente de la séquence de flux de 1€ reçus de la période 1 à la période n est alors égale à la somme des :

$$1/(1+r)^t$$

correspondant chacun à une période, soit:

$$S_n = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

La Valeur capitalisée ou acquise

La valeur acquise (ou valeur capitalisée ou valeur actualisée à l'instant final) d'une séquence de flux est égale à la somme des valeurs capitalisées jusqu'à l'instant final de chacun des flux composant la séquence.

$$V_{aq} = F_0 * (1+r)^n + F_1 * (1+r)^{n-1} + \dots + F_{n-1} * (1+r) + F_n$$



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

VNP ou VAN

Dans le cas d'un investissement, on emploie le terme de :

- VNP (valeur nette présente) ou
- VAN (valeur actuelle nette)

Le premier flux est négatif

Le taux d'actualisation est souvent approximé par le coût du capital



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

VNP ou VAN

Exemple :

Calculer la VNP de l'investissement suivant, en utilisant un taux d'actualisation de 10%:

Périodes	0	1	2
Flux de trésorerie	- 200	100	200

Réponse :

En actualisant les flux nous obtenons :

$$\text{VNP} = -200 + \frac{100}{1+0,1} + \frac{200}{(1+0,1)^2} = -200 + 91 + 165,2 = 56,2$$

PRESENT VALUE OF ORDINARY ANNUITY (annuity in arrears -- end of period payments)

2

Periods		RATE PER PERIOD															
		0.25%	0.50%	0.75%	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%	11.00%
1	0.99751	0.99502	0.99256	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96154	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286
2	1.99252	1.98510	1.97772	1.97040	1.95588	1.94156	1.92742	1.91347	1.88609	1.85941	1.83339	1.80802	1.78326	1.75911	1.73554	1.71252	1.69005
3	2.98506	2.97025	2.95556	2.94099	2.91220	2.88388	2.85602	2.82861	2.77509	2.72325	2.67301	2.62432	2.57710	2.53129	2.48685	2.44371	2.40183
4	3.97512	3.95050	3.92611	3.90197	3.85438	3.80773	3.76197	3.71710	3.62990	3.54595	3.46511	3.38721	3.31213	3.23972	3.16987	3.10245	3.03735
5	4.96272	4.92587	4.88944	4.85343	4.78264	4.71346	4.64583	4.57971	4.45182	4.32948	4.21236	4.10020	3.99271	3.88965	3.79079	3.69590	3.60478
6	5.94785	5.89638	5.84560	5.79548	5.69719	5.60143	5.50813	5.41719	5.24214	5.07569	4.91732	4.76654	4.62288	4.48592	4.35526	4.23054	4.11141
7	6.93052	6.86207	6.79464	6.72819	6.59821	6.47199	6.34939	6.23028	6.00205	5.78637	5.58238	5.38929	5.20637	5.03295	4.86842	4.71220	4.56376
8	7.91074	7.82296	7.73661	7.65168	7.48593	7.32548	7.17014	7.01969	6.73274	6.46321	6.20979	5.97130	5.74664	5.53482	5.33493	5.14612	4.96764
9	8.88852	8.77906	8.67158	8.56602	8.36052	8.16224	7.97087	7.78611	7.43533	7.10782	6.80169	6.51523	6.24689	5.99525	5.75902	5.53705	5.32825
10	9.86386	9.73041	9.59958	9.47130	9.22218	8.98259	8.75206	8.53020	8.11090	7.72173	7.36009	7.02358	6.71008	6.41766	6.14457	5.88923	5.65022
11	10.83677	10.67703	10.52067	10.36763	10.07112	9.78685	9.51421	9.25262	8.76048	8.30641	7.88687	7.49867	7.13896	6.80519	6.49506	6.20652	5.93770
12	11.80725	11.61893	11.43491	11.25508	10.90751	10.57534	10.25776	9.95400	9.38507	8.86325	8.38384	7.94269	7.53608	7.16073	6.81369	6.49236	6.19437
13	12.77532	12.55615	12.34235	12.13374	11.73153	11.34837	10.98318	10.63496	9.98565	9.39357	8.85268	8.35765	7.90378	7.48690	7.10336	6.74987	6.42355
14	13.74096	13.48871	13.24302	13.00370	12.54338	12.10625	11.69091	11.29607	10.56312	9.89864	9.29498	8.74547	8.24424	7.78615	7.36669	6.98187	6.62817
15	14.70420	14.41662	14.13699	13.86505	13.34323	12.84926	12.38138	11.93794	11.11839	10.37966	9.71225	9.10791	8.55948	8.06069	7.60608	7.19087	6.81086
16	15.66504	15.33993	15.02431	14.71787	14.13126	13.57771	13.05500	12.56110	11.65230	10.83777	10.10590	9.44665	8.85137	8.31256	7.82371	7.37916	6.97399
17	16.62348	16.25863	15.90502	15.56225	14.90765	14.29187	13.71220	13.16612	12.16567	11.27407	10.47726	9.76322	9.12164	8.54363	8.02155	7.54879	7.11963
18	17.57953	17.17277	16.77918	16.39827	15.67256	14.99203	14.35336	13.75351	12.65930	11.68959	10.82760	10.05909	9.37189	8.75563	8.20141	7.70162	7.24967
19	18.53320	18.08236	17.64683	17.22601	16.42617	15.67846	14.97889	14.32380	13.13394	12.08532	11.15812	10.33560	9.60360	8.95011	8.36492	7.83929	7.36578
20	19.48449	18.98742	18.50802	18.04555	17.16864	16.35143	15.58916	14.87747	13.59033	12.46221	11.46992	10.59401	9.81815	9.12855	8.51356	7.96333	7.46944
21	20.43340	19.88798	19.36280	18.85698	17.90014	17.01121	16.18455	15.41502	14.02916	12.82115	11.76408	10.83553	10.01680	9.29224	8.64869	8.07507	7.56200
22	21.37995	20.78406	20.21121	19.66038	18.62082	17.65805	16.76541	15.93692	14.45112	13.16300	12.04158	11.06124	10.20074	9.44243	8.77154	8.17574	7.64465
23	22.32414	21.67568	21.05331	20.45582	19.33086	18.29220	17.33211	16.44361	14.85684	13.48857	12.30338	11.27219	10.37106	9.58021	8.88322	8.26643	7.71843
24	23.26598	22.56287	21.88915	21.24339	20.03041	18.91393	17.88499	16.93554	15.24696	13.79864	12.55036	11.46933	10.52876	9.70661	8.98474	8.34814	7.78432
25	24.20547	23.44564	22.71876	22.02316	20.71961	19.52346	18.42438	17.41315	15.62208	14.09394	12.78336	11.65358	10.67478	9.82258	9.07704	8.42174	7.84314
30	28.86787	27.79405	26.77508	25.80771	24.01584	22.39646	20.93029	19.60044	17.29203	15.37245	13.76483	12.40904	11.25778	10.27365	9.42691	8.69379	8.05518
35	33.47243	32.03537	30.68266	29.40858	27.07559	24.99862	23.14516	21.48722	18.66461	16.37419	14.49825	12.94767	11.65457	10.56682	9.64416	8.85524	8.17550
40	38.01986	36.17223	34.44694	32.83469	29.91585	27.35548	25.10278	23.11477	19.79277	17.15909	15.04630	13.33171	11.92461	10.75736	9.77905	8.95105	8.24378
50	46.94617	44.14279	41.56645	39.19612	34.99969	31.42361	28.36231	25.72976	21.48218	18.25593	15.76186	13.80075	12.23348	10.96168	9.91481	9.04165	8.30450

PRESENT VALUE OF \$1

2

Periods	RATE PER PERIOD																
	0.25%	0.50%	0.75%	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%	11.00%	12.00%
1	0.99751	0.99502	0.99256	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96154	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286
2	0.99502	0.99007	0.98517	0.98030	0.97066	0.96117	0.95181	0.94260	0.92456	0.90703	0.89000	0.87344	0.85734	0.84168	0.82645	0.81162	0.79719
3	0.99254	0.98515	0.97783	0.97059	0.95632	0.94232	0.92860	0.91514	0.88900	0.86384	0.83962	0.81630	0.79383	0.77218	0.75131	0.73119	0.71178
4	0.99006	0.98025	0.97055	0.96098	0.94218	0.92385	0.90595	0.88849	0.85480	0.82270	0.79209	0.76290	0.73503	0.70843	0.68301	0.65873	0.63552
5	0.98759	0.97537	0.96333	0.95147	0.92826	0.90573	0.88385	0.86261	0.82193	0.78353	0.74726	0.71299	0.68058	0.64993	0.62092	0.59345	0.56743
6	0.98513	0.97052	0.95616	0.94205	0.91454	0.88797	0.86230	0.83748	0.79031	0.74622	0.70496	0.66634	0.63017	0.59627	0.56447	0.53464	0.50663
7	0.98267	0.96569	0.94904	0.93272	0.90103	0.87056	0.84127	0.81309	0.75992	0.71068	0.66506	0.62275	0.58349	0.54703	0.51316	0.48166	0.45235
8	0.98022	0.96089	0.94198	0.92348	0.88771	0.85349	0.82075	0.78941	0.73069	0.67684	0.62741	0.58201	0.54027	0.50187	0.46651	0.43393	0.40388
9	0.97778	0.95610	0.93496	0.91434	0.87459	0.83676	0.80073	0.76642	0.70259	0.64461	0.59190	0.54393	0.50025	0.46043	0.42410	0.39092	0.36061
10	0.97534	0.95135	0.92800	0.90529	0.86167	0.82035	0.78120	0.74409	0.67556	0.61391	0.55839	0.50835	0.46319	0.42241	0.38554	0.35218	0.32197
11	0.97291	0.94661	0.92109	0.89632	0.84893	0.80426	0.76214	0.72242	0.64958	0.58468	0.52679	0.47509	0.42888	0.38753	0.35049	0.31728	0.28748
12	0.97048	0.94191	0.91424	0.88745	0.83639	0.78849	0.74356	0.70138	0.62460	0.55684	0.49697	0.44401	0.39711	0.35553	0.31863	0.28584	0.25668
13	0.96806	0.93722	0.90743	0.87866	0.82403	0.77303	0.72542	0.68095	0.60057	0.53032	0.46884	0.41496	0.36770	0.32618	0.28966	0.25751	0.22917
14	0.96565	0.93256	0.90068	0.86996	0.81185	0.75788	0.70773	0.66112	0.57748	0.50507	0.44230	0.38782	0.34046	0.29925	0.26333	0.23199	0.20462
15	0.96324	0.92792	0.89397	0.86135	0.79985	0.74301	0.69047	0.64186	0.55526	0.48102	0.41727	0.36245	0.31524	0.27454	0.23939	0.20900	0.18270
16	0.96084	0.92330	0.88732	0.85282	0.78803	0.72845	0.67362	0.62317	0.53391	0.45811	0.39365	0.33873	0.29189	0.25187	0.21763	0.18829	0.16312
17	0.95844	0.91871	0.88071	0.84438	0.77639	0.71416	0.65720	0.60502	0.51337	0.43630	0.37136	0.31657	0.27027	0.23107	0.19784	0.16963	0.14564
18	0.95605	0.91414	0.87416	0.83602	0.76491	0.70016	0.64117	0.58739	0.49363	0.41552	0.35034	0.29586	0.25025	0.21199	0.17986	0.15282	0.13004
19	0.95367	0.90959	0.86765	0.82774	0.75361	0.68643	0.62553	0.57029	0.47464	0.39573	0.33051	0.27651	0.23171	0.19449	0.16351	0.13768	0.11611
20	0.95129	0.90506	0.86119	0.81954	0.74247	0.67297	0.61027	0.55368	0.45639	0.37689	0.31180	0.25842	0.21455	0.17843	0.14864	0.12403	0.10367
21	0.94892	0.90056	0.85478	0.81143	0.73150	0.65978	0.59539	0.53755	0.43883	0.35894	0.29416	0.24151	0.19866	0.16370	0.13513	0.11174	0.09256
22	0.94655	0.89608	0.84842	0.80340	0.72069	0.64684	0.58086	0.52189	0.42196	0.34185	0.27751	0.22571	0.18394	0.15018	0.12285	0.10067	0.08264
23	0.94419	0.89162	0.84210	0.79544	0.71004	0.63416	0.56670	0.50669	0.40573	0.32557	0.26180	0.21095	0.17032	0.13778	0.11168	0.09069	0.07379
24	0.94184	0.88719	0.83583	0.78757	0.69954	0.62172	0.55288	0.49193	0.39012	0.31007	0.24698	0.19715	0.15770	0.12640	0.10153	0.08170	0.06588
25	0.93949	0.88277	0.82961	0.77977	0.68921	0.60953	0.53939	0.47761	0.37512	0.29530	0.23300	0.18425	0.14602	0.11597	0.09230	0.07361	0.05882
30	0.92783	0.86103	0.79919	0.74192	0.63976	0.55207	0.47674	0.41199	0.30832	0.23138	0.17411	0.13137	0.09938	0.07537	0.05731	0.04368	0.03338
35	0.91632	0.83982	0.76988	0.70591	0.59387	0.50003	0.42137	0.35538	0.25342	0.18129	0.13011	0.09366	0.06763	0.04899	0.03558	0.02592	0.01894
40	0.90495	0.81914	0.74165	0.67165	0.55126	0.45289	0.37243	0.30656	0.20829	0.14205	0.09722	0.06678	0.04603	0.03184	0.02209	0.01538	0.01075
50	0.88263	0.77929	0.68825	0.60804	0.47500	0.37153	0.29094	0.22811	0.14071	0.08720	0.05429	0.03395	0.02132	0.01345	0.00852	0.00542	0.00346



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Exemple

Exemple

Considérons un investissement caractérisé par la série de flux de trésorerie $\{F_0, F_1, \dots, F_{10}\}$ suivante :

Instants	0	1 à 9	10
Flux de trésorerie	- 380	+89,4	+228,8

Calculez la VAN avec un taux d'actualisation de 10%



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Exemple

Réponse :

Calculons séparément la valeur présente des flux de 89,4 K€ reçus pendant les périodes 1 à 9 ($VP(F_1, \dots, F_9)$) et celle du flux de 228,8 reçu à la période 10 ($VP(F_{10})$).

$VP(F_1, \dots, F_9)$ peut être obtenu à partir de la table financière 1 :

$$VP(F_1, \dots, F_9) = 89,4 \times \frac{1 - (1+0,1)^{-9}}{0,1}$$

PRESENT VALUE OF ORDINARY ANNUITY (annuity in arrears -- end of period payments)

2

Periods		RATE PER PERIOD															
		0.25%	0.50%	0.75%	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%	11.00%
1	0.99751	0.99502	0.99256	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96154	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286
2	1.99252	1.98510	1.97772	1.97040	1.95588	1.94156	1.92742	1.91347	1.88609	1.85941	1.83339	1.80802	1.78326	1.75911	1.73554	1.71252	1.69005
3	2.98506	2.97025	2.95556	2.94099	2.91220	2.88388	2.85602	2.82861	2.77509	2.72325	2.67301	2.62432	2.57710	2.53129	2.48685	2.44371	2.40183
4	3.97512	3.95050	3.92611	3.90197	3.85438	3.80773	3.76197	3.71710	3.62990	3.54595	3.46511	3.38721	3.31213	3.23972	3.16987	3.10245	3.03735
5	4.96272	4.92587	4.88944	4.85343	4.78264	4.71346	4.64583	4.57971	4.45182	4.32948	4.21236	4.10020	3.99271	3.88965	3.79079	3.69590	3.60478
6	5.94785	5.89638	5.84560	5.79548	5.69719	5.60143	5.50813	5.41719	5.24214	5.07569	4.91732	4.76654	4.62288	4.48592	4.35526	4.23054	4.11141
7	6.93052	6.86207	6.79464	6.72819	6.59821	6.47199	6.34939	6.23028	6.00205	5.78637	5.58238	5.38929	5.20637	5.03295	4.86842	4.71220	4.56376
8	7.91074	7.82296	7.73661	7.65168	7.48593	7.32548	7.17014	7.01969	6.73274	6.46321	6.20979	5.97130	5.74664	5.53482	5.33493	5.14612	4.96764
9	8.88852	8.77906	8.67158	8.56602	8.36052	8.16224	7.97087	7.78611	7.43533	7.10782	6.80169	6.51523	6.24689	5.99525	5.75902	5.53705	5.32825
10	9.86386	9.73041	9.59958	9.47130	9.22218	8.98259	8.75206	8.53020	8.11090	7.72173	7.36009	7.02358	6.71008	6.41766	6.14457	5.88923	5.65022
11	10.83677	10.67703	10.52067	10.36763	10.07112	9.78685	9.51421	9.25262	8.76048	8.30641	7.88687	7.49867	7.13896	6.80519	6.49506	6.20652	5.93770
12	11.80725	11.61893	11.43491	11.25508	10.90751	10.57534	10.25776	9.95400	9.38507	8.86325	8.38384	7.94269	7.53608	7.16073	6.81369	6.49236	6.19437
13	12.77532	12.55615	12.34235	12.13374	11.73153	11.34837	10.98318	10.63496	9.98565	9.39357	8.85268	8.35765	7.90378	7.48690	7.10336	6.74987	6.42355
14	13.74096	13.48871	13.24302	13.00370	12.54338	12.10625	11.69091	11.29607	10.56312	9.89864	9.29498	8.74547	8.24424	7.78615	7.36669	6.98187	6.62817
15	14.70420	14.41662	14.13699	13.86505	13.34323	12.84926	12.38138	11.93794	11.11839	10.37966	9.71225	9.10791	8.55948	8.06069	7.60608	7.19087	6.81086
16	15.66504	15.33993	15.02431	14.71787	14.13126	13.57771	13.05500	12.56110	11.65230	10.83777	10.10590	9.44665	8.85137	8.31256	7.82371	7.37916	6.97399
17	16.62348	16.25863	15.90502	15.56225	14.90765	14.29187	13.71220	13.16612	12.16567	11.27407	10.47726	9.76322	9.12164	8.54363	8.02155	7.54879	7.11963
18	17.57953	17.17277	16.77918	16.39827	15.67256	14.99203	14.35336	13.75351	12.65930	11.68959	10.82760	10.05909	9.37189	8.75563	8.20141	7.70162	7.24967
19	18.53320	18.08236	17.64683	17.22601	16.42617	15.67846	14.97889	14.32380	13.13394	12.08532	11.15812	10.33560	9.60360	8.95011	8.36492	7.83929	7.36578
20	19.48449	18.98742	18.50802	18.04555	17.16864	16.35143	15.58916	14.87747	13.59033	12.46221	11.46992	10.59401	9.81815	9.12855	8.51356	7.96333	7.46944
21	20.43340	19.88798	19.36280	18.85698	17.90014	17.01121	16.18455	15.41502	14.02916	12.82115	11.76408	10.83553	10.01680	9.29224	8.64869	8.07507	7.56200
22	21.37995	20.78406	20.21121	19.66038	18.62082	17.65805	16.76541	15.93692	14.45112	13.16300	12.04158	11.06124	10.20074	9.44243	8.77154	8.17574	7.64465
23	22.32414	21.67568	21.05331	20.45582	19.33086	18.29220	17.33211	16.44361	14.85684	13.48857	12.30338	11.27219	10.37106	9.58021	8.88322	8.26643	7.71843
24	23.26598	22.56287	21.88915	21.24339	20.03041	18.91393	17.88499	16.93554	15.24696	13.79864	12.55036	11.46933	10.52876	9.70661	8.98474	8.34814	7.78432
25	24.20547	23.44564	22.71876	22.02316	20.71961	19.52346	18.42438	17.41315	15.62208	14.09394	12.78336	11.65358	10.67478	9.82258	9.07704	8.42174	7.84314
30	28.86787	27.79405	26.77508	25.80771	24.01584	22.39646	20.93029	19.60044	17.29203	15.37245	13.76483	12.40904	11.25778	10.27365	9.42691	8.69379	8.05518
35	33.47243	32.03537	30.68266	29.40858	27.07559	24.99862	23.14516	21.48722	18.66461	16.37419	14.49825	12.94767	11.65457	10.56682	9.64416	8.85524	8.17550
40	38.01986	36.17223	34.44694	32.83469	29.91585	27.35548	25.10278	23.11477	19.79277	17.15909	15.04630	13.33171	11.92461	10.75736	9.77905	8.95105	8.24378
50	46.94617	44.14279	41.56645	39.19612	34.99969	31.42361	28.36231	25.72976	21.48218	18.25593	15.76186	13.80075	12.23348	10.96168	9.91481	9.04165	8.30450



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Exemple

Réponse :

Calculons séparément la valeur présente des flux de 89,4 K€ reçus pendant les périodes 1 à 9 ($VP(F_1, \dots, F_9)$) et celle du flux de 228,8 reçu à la période 10 ($VP(F_{10})$).

$VP(F_1, \dots, F_9)$ peut être obtenu à partir de la table financière 1 :

$$VP(F_1, \dots, F_9) = 89,4 \times \frac{1 - (1+0,1)^{-9}}{0,1} = 89,4 \times 5,759 = 514,8$$

$VP(F_{10})$ peut être obtenu à partir de la table financière 2 :

$$VP(F_{10}) = 228,8 \times \frac{1}{(1+0,1)^{10}}$$

P e r i o d s	PRESENT VALUE OF \$1																
	RATE PER PERIOD																
	0.25%	0.50%	0.75%	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%	11.00%	12.00%
1	0.99751	0.99502	0.99256	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96154	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286
2	0.99502	0.99007	0.98517	0.98030	0.97066	0.96117	0.95181	0.94260	0.92456	0.90703	0.89000	0.87344	0.85734	0.84168	0.82645	0.81162	0.79719
3	0.99254	0.98515	0.97783	0.97059	0.95632	0.94232	0.92860	0.91514	0.88900	0.86384	0.83962	0.81630	0.79383	0.77218	0.75131	0.73119	0.71178
4	0.99006	0.98025	0.97055	0.96098	0.94218	0.92385	0.90595	0.88849	0.85480	0.82270	0.79209	0.76290	0.73503	0.70843	0.68301	0.65873	0.63552
5	0.98759	0.97537	0.96333	0.95147	0.92826	0.90573	0.88385	0.86261	0.82193	0.78353	0.74726	0.71299	0.68058	0.64993	0.62092	0.59345	0.56743
6	0.98513	0.97052	0.95616	0.94205	0.91454	0.88797	0.86230	0.83748	0.79031	0.74622	0.70496	0.66634	0.63017	0.59627	0.56447	0.53464	0.50663
7	0.98267	0.96569	0.94904	0.93272	0.90103	0.87056	0.84127	0.81309	0.75992	0.71068	0.66506	0.62275	0.58349	0.54703	0.51316	0.48166	0.45235
8	0.98022	0.96089	0.94198	0.92348	0.88771	0.85349	0.82075	0.78941	0.73069	0.67684	0.62741	0.58201	0.54027	0.50187	0.46651	0.43393	0.40388
9	0.97778	0.95610	0.93496	0.91434	0.87459	0.83676	0.80073	0.76642	0.70259	0.64461	0.59190	0.54393	0.50025	0.46043	0.42410	0.39092	0.36061
10	0.97534	0.95135	0.92800	0.90529	0.86167	0.82035	0.78120	0.74409	0.67556	0.61391	0.55839	0.50835	0.46319	0.42241	0.38554	0.35218	0.32197
11	0.97291	0.94661	0.92109	0.89632	0.84893	0.80426	0.76214	0.72242	0.64958	0.58468	0.52679	0.47509	0.42888	0.38753	0.35049	0.31728	0.28748
12	0.97048	0.94191	0.91424	0.88745	0.83639	0.78849	0.74356	0.70138	0.62460	0.55684	0.49697	0.44401	0.39711	0.35553	0.31863	0.28584	0.25668
13	0.96806	0.93722	0.90743	0.87866	0.82403	0.77303	0.72542	0.68095	0.60057	0.53032	0.46884	0.41496	0.36770	0.32618	0.28966	0.25751	0.22917
14	0.96565	0.93256	0.90068	0.86996	0.81185	0.75788	0.70773	0.66112	0.57748	0.50507	0.44230	0.38782	0.34046	0.29925	0.26333	0.23199	0.20462
15	0.96324	0.92792	0.89397	0.86135	0.79985	0.74301	0.69047	0.64186	0.55526	0.48102	0.41727	0.36245	0.31524	0.27454	0.23939	0.20900	0.18270
16	0.96084	0.92330	0.88732	0.85282	0.78803	0.72845	0.67362	0.62317	0.53391	0.45811	0.39365	0.33873	0.29189	0.25187	0.21763	0.18829	0.16312
17	0.95844	0.91871	0.88071	0.84438	0.77639	0.71416	0.65720	0.60502	0.51337	0.43630	0.37136	0.31657	0.27027	0.23107	0.19784	0.16963	0.14564
18	0.95605	0.91414	0.87416	0.83602	0.76491	0.70016	0.64117	0.58739	0.49363	0.41552	0.35034	0.29586	0.25025	0.21199	0.17986	0.15282	0.13004
19	0.95367	0.90959	0.86765	0.82774	0.75361	0.68643	0.62553	0.57029	0.47464	0.39573	0.33051	0.27651	0.23171	0.19449	0.16351	0.13768	0.11611
20	0.95129	0.90506	0.86119	0.81954	0.74247	0.67297	0.61027	0.55368	0.45639	0.37689	0.31180	0.25842	0.21455	0.17843	0.14864	0.12403	0.10367
21	0.94892	0.90056	0.85478	0.81143	0.73150	0.65978	0.59539	0.53755	0.43883	0.35894	0.29416	0.24151	0.19866	0.16370	0.13513	0.11174	0.09256
22	0.94655	0.89608	0.84842	0.80340	0.72069	0.64684	0.58086	0.52189	0.42196	0.34185	0.27751	0.22571	0.18394	0.15018	0.12285	0.10067	0.08264
23	0.94419	0.89162	0.84210	0.79544	0.71004	0.63416	0.56670	0.50669	0.40573	0.32557	0.26180	0.21095	0.17032	0.13778	0.11168	0.09069	0.07379
24	0.94184	0.88719	0.83583	0.78757	0.69954	0.62172	0.55288	0.49193	0.39012	0.31007	0.24698	0.19715	0.15770	0.12640	0.10153	0.08170	0.06588
25	0.93949	0.88277	0.82961	0.77977	0.68921	0.60953	0.53939	0.47761	0.37512	0.29530	0.23300	0.18425	0.14602	0.11597	0.09230	0.07361	0.05882
30	0.92783	0.86103	0.79919	0.74192	0.63976	0.55207	0.47674	0.41199	0.30832	0.23138	0.17411	0.13137	0.09938	0.07537	0.05731	0.04368	0.03338
35	0.91632	0.83982	0.76988	0.70591	0.59387	0.50003	0.42137	0.35538	0.25342	0.18129	0.13011	0.09366	0.06763	0.04899	0.03558	0.02592	0.01894
40	0.90495	0.81914	0.74165	0.67165	0.55126	0.45289	0.37243	0.30656	0.20829	0.14205	0.09722	0.06678	0.04603	0.03184	0.02209	0.01538	0.01075
50	0.88263	0.77929	0.68825	0.60804	0.47500	0.37153	0.29094	0.22811	0.14071	0.08720	0.05429	0.03395	0.02132	0.01345	0.00852	0.00542	0.00346



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Exemple

Réponse :

Calculons séparément la valeur présente des flux de 89,4 K€ reçus pendant les périodes 1 à 9 ($VP(F_1, \dots, F_9)$) et celle du flux de 228,8 reçu à la période 10 ($VP(F_{10})$).

$VP(F_1, \dots, F_9)$ peut être obtenu à partir de la table financière 1 :

$$VP(F_1, \dots, F_9) = 89,4 \times \frac{1 - (1+0,1)^{-9}}{0,1} = 89,4 \times 5,759 = 514,8.$$

$VP(F_{10})$ peut être obtenu à partir de la table financière 2 :

$$VP(F_{10}) = 228,8 \times \frac{1}{(1+0,1)^{10}} = 228,8 \times 0,3855 = 88,2.$$



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

Exemple

$$F_0 = - 380$$

$$VP(F_1, \dots, F_9) = 89,4 \left[\frac{1 - (1 + 0,1)^{-9}}{0,1} \right] = 89,4 \times 5,759 = 514,8.$$

$$VP(F_{10}) = 228,8 \frac{1}{(1+0,1)^{10}} = 228,8 \times 0,3855 = 88,2.$$

$$VNP = - 380 + 514,8 + 88,2 = 223 \text{ K€}$$



Les principes d'actualisation et la valeur présente

2

VAN et critères de choix

Un investissement ne sera retenu que s'il produit une VNP positive et entre deux investissements on préférera celui dont la VNP est la plus élevée. Cela permet d'énoncer les deux règles suivantes qui constituent le critère de la valeur nette présente:

1. **Règle 1** : un investissement ne doit être retenu que si sa valeur nette présente est positive.
2. **Règle 2** : Entre plusieurs investissements mutuellement exclusifs on doit retenir celui dont la valeur nette présente est la plus grande.



Introduction

Nous avons déjà défini le taux de rentabilité actuariel, dans le cas d'un prêt-investissement de durée T générant deux flux $\{-C, F\}$: c'est le taux d'intérêt qui, pour un capital placé égal à C , donne un flux terminal F en T . C'est donc r^* tel que $F = C(1+r^*)^T$ ou encore :

$$-C + \frac{F}{(1+r^*)^T} = 0$$

Le taux de rentabilité actuariel r^* est donc le taux d'actualisation particulier qui annule la valeur présente de l'échéancier à deux flux.

→ Généralisation à plusieurs flux



Introduction

Exemple : Commençons par considérer l'investissement suivant :

Instant	0	1	2
Flux de trésorerie	- 200	80	280

Si r est le taux d'actualisation, nous pouvons écrire l'expression de sa valeur présente, quelle que soit la valeur de r :

$$\text{VNP} (r) = -200 + \frac{80}{1+r} + \frac{280}{(1+r)^2}$$

La VNP est une fonction du taux d'actualisation r



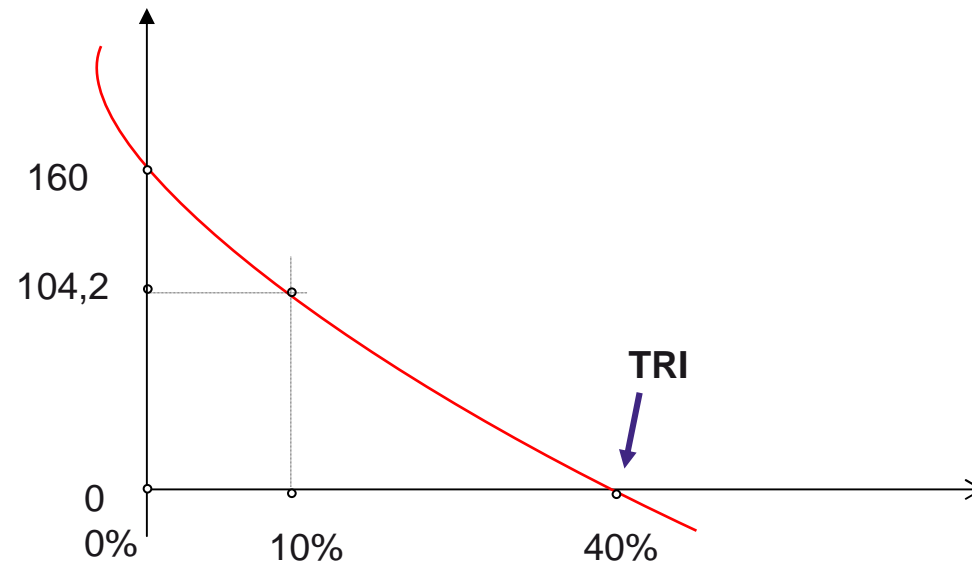
Le Taux de rentabilité interne

3

Introduction

Par exemple si :

- $r = 10\%$: $VNP = 104,2$;
- $r = 0$: $VNP = 160$;
- $r = 40\%$: $VNP = 0$



La courbe représentative de $VNP(r)$ coupe l'axe des r en un point et un seul : une valeur de r **unique annule donc la VNP** ; nous appellerons cette valeur particulière de r , le taux de rentabilité interne (**TRI**) de l'investissement.



Définition

Définition:

Nous définirons le TRI (taux de rentabilité interne) d'un investissement générant la séquence de flux annuels (F_0, F_1, \dots, F_n) par la relation :

$$0 = F_0 + \frac{F_1}{1 + \text{TRI}} + \frac{F_2}{(1 + \text{TRI})^2} + \dots + \frac{F_n}{(1 + \text{TRI})^n}$$

Le TRI d'un investissement est donc le taux d'actualisation particulier qui annule sa VNP.



Approximation du TRI par interpolation linéaire

Quand on ne dispose pas d'une calculatrice ni d'un tableur, le calcul du TRI se fait par approximations successives : on encadre le TRI par deux valeurs proches, l'une trop grande ($VNP < 0$) et l'autre trop petite ($VNP > 0$), puis l'on effectue une interpolation linéaire.

$$r_1 \longrightarrow VAN(r_1) > 0$$

$$TRI \longrightarrow VAN(TRI) = 0 \quad r^* \text{ ou } TRI = \frac{r_2 \times VNP(r_1) - r_1 \times VNP(r_2)}{VNP(r_1) - VNP(r_2)}$$

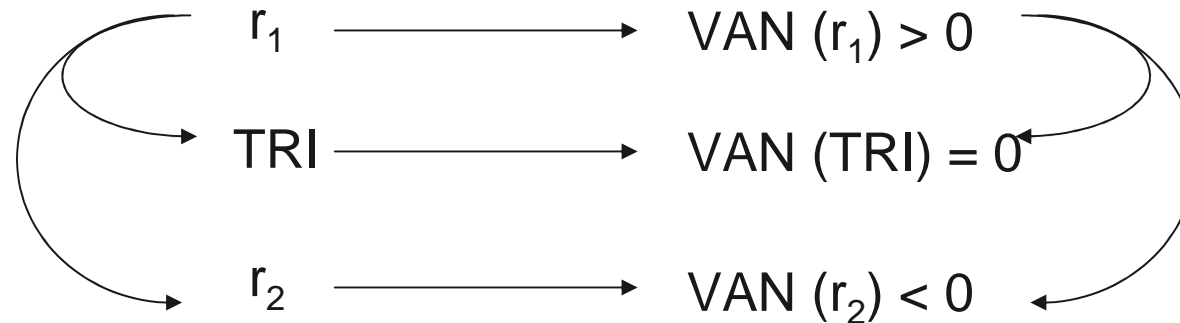
$$r_2 \longrightarrow VAN(r_2) < 0$$



Le Taux de rentabilité interne

3

Approximation du TRI par interpolation linéaire



$$\frac{r_1 - TRI}{r_1 - r_2} = \frac{VNP(r_1) - VNP(TRI)}{VNP(r_1) - VNP(r_2)}$$

$$r^* \text{ ou } TRI = \frac{r_2 \times VNP(r_1) - r_1 \times VNP(r_2)}{VNP(r_1) - VNP(r_2)}$$



Le Taux de rentabilité interne

3

TRI de séquences Type / opération à deux flux

“”

Le TRI d'un investissement de séquence $\{-S, S + iS\}$ où iS représente les intérêts est égal au taux d'intérêt i

$$-S + S \frac{1+i}{1+TRI} = 0 \quad ; \quad \text{soit } TRI = i$$

Plus généralement (deux flux) : $(-x, y)$

Le TRI de cette séquence est $\frac{y-x}{x}$



TRI de séquences Type / rente perpétuelle

Dans le cas d'une rente perpétuelle $(-x, y, y, \dots, y, \dots$ à l'infini).

Le TRI de cette séquence est $\frac{y}{x}$

Démonstration

On peut vérifier que le TRI de cette séquence coïncide bien avec ce taux en résolvant l'équation

$$0 = -x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y}{(1+TRI)^i} = -x + \frac{y}{TRI}, \text{ d'où } TRI = \frac{y}{x}$$



TRI de séquences Type / remboursement in fine

Dans le cas d'un remboursement in fine $(-x, y, y, \dots, y+x)$.

Le TRI de cette séquence est $\frac{y}{x}$

Démonstration

On peut vérifier que le TRI de cette séquence coïncide bien avec ce taux en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} 0 &= -x + \sum_{i=1}^n \frac{y}{(1+TR)^i} + \frac{x}{(1+TR)^n} = -x(1 - (1+TR)^{-n}) + y \frac{1 - (1+TR)^{-n}}{TR} \\ &= -x + \frac{y}{TR} \quad \text{d'où } TRI = \frac{y}{x} \end{aligned}$$



Exemples

Exemple :

-100, 6 à l'infini donne un TRI de 6% ; un prêt de 100 au taux de 6 % dont le capital n'est jamais remboursé engendre bien la séquence considérée.

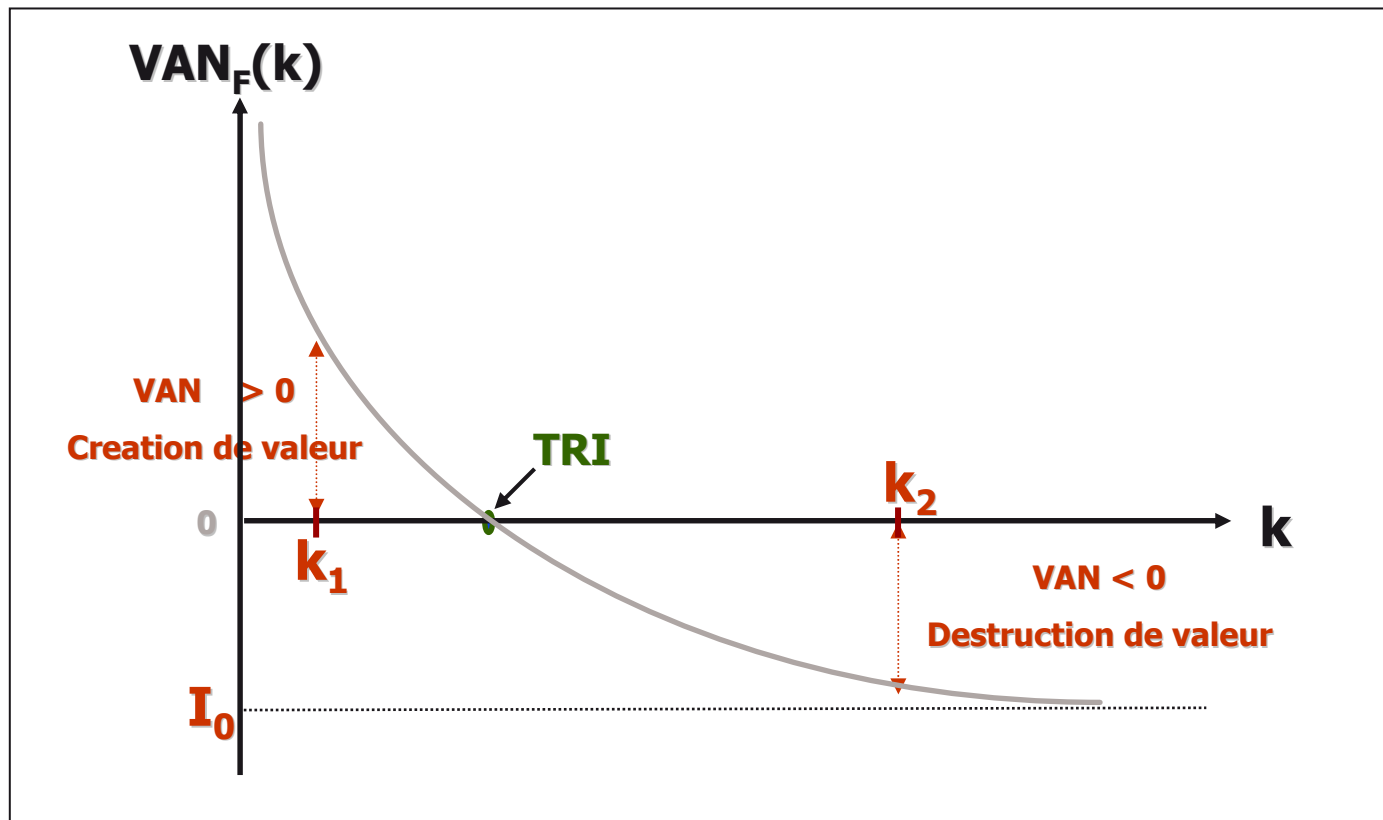
Exemple :

-200, 10, 10, 10, 210 donne un TRI de $\frac{10}{200}$

soit 5% ; un prêt in fine sur quatre ans, d'un montant de 200 , au taux de 5 %, engendre bien la séquence considérée.



VAN versus TRI





VAN versus TRI / conflits

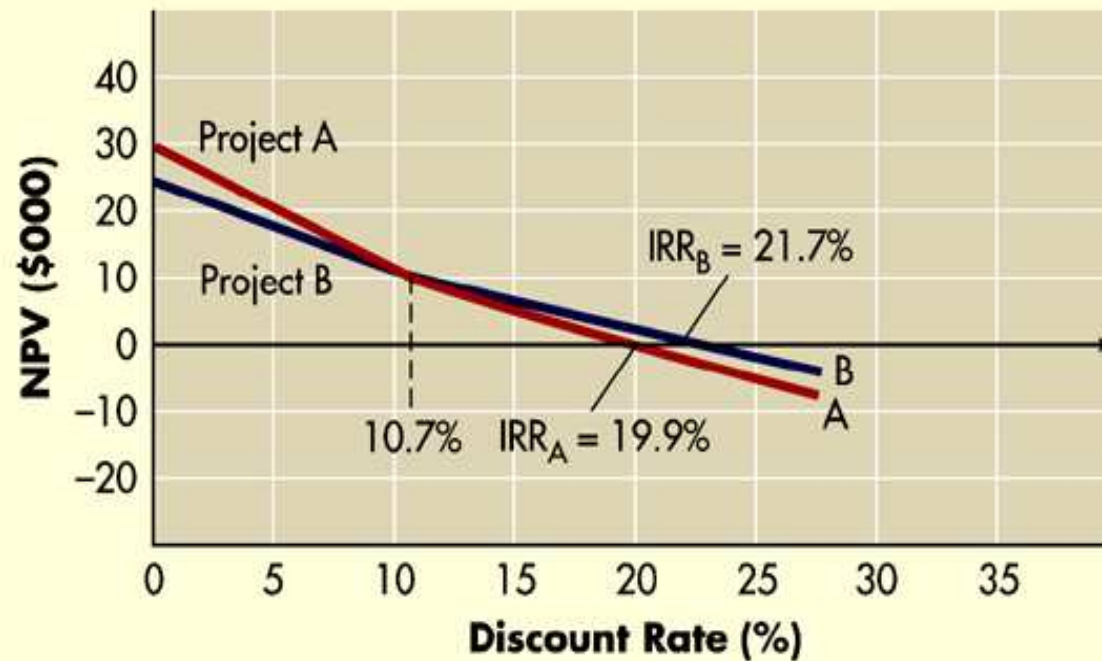
TABLE 11.3 Discount-Rate–NPV Coordinates for Projects A and B

Discount rate	Net present value	
	Project A	Project B
0%	\$28,000	\$25,000
10	11,071	10,924
19.9	0	—
21.7	—	0



Le Taux de rentabilité interne

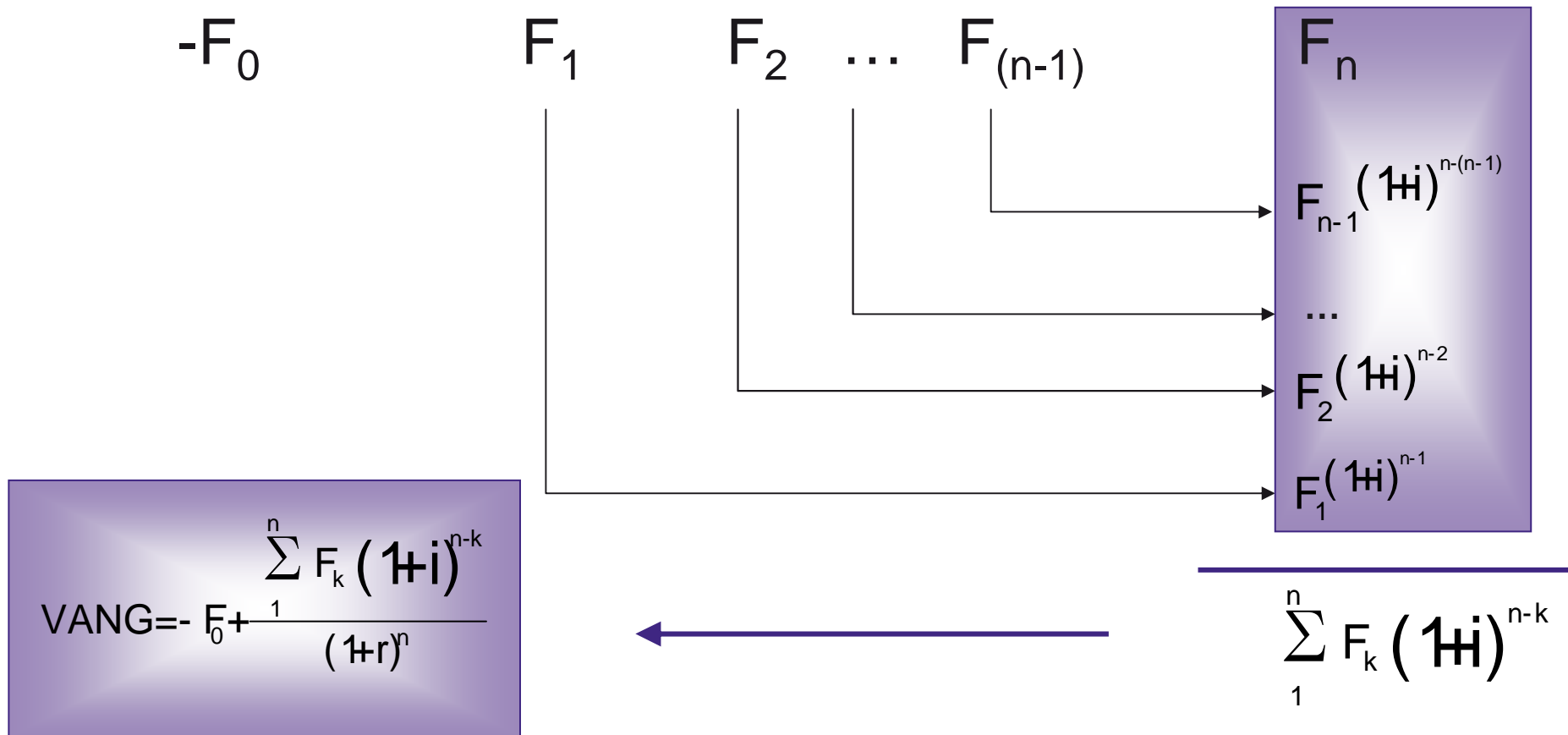
VAN versus TRI /conflits





Le Taux de rentabilité interne

La solution au conflit : la VAN globale





La solution au conflit : la VAN globale

- TIR et VAN globaux sont plus économiquement réalistes puisqu'ils distinguent le taux de rendement du projet du coût du capital.
- VAN globale et TIR global permettent toujours de déterminer le meilleur investissement de projets mutuellement exclusifs.



Quel taux d'actualisation ?

4

Cout du capital

- Dans les précédents exemples, le taux d'actualisation est toujours une donnée
- Dans la pratique, **les managers doivent estimer ce taux.** D'une manière générale ce taux doit être égale **au coût du capital.**





Quel taux d'actualisation ?

4

Cout du capital

Il s'agit de déterminer le TRI mini à exiger de l'investissement
ce TRI mini servira de taux d'actualisation

En absence D'aléas

- ◆ Coût du financement
- ◆ Rentabilité des investissements alternatifs ...?

En présence D'aléas

- ◆ Coût moyen pondéré

$$CMPC = WACC = k_e \frac{E}{V} + k_d \frac{D}{V} (1-t)$$

- ◆ Référence au marché ...?

$$\text{coût} = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

Le TRI minimum à exiger

Croît avec le risque de l'investissement

Traduit l'exigence des bailleurs de fonds (actionnaires et prêteurs)



Quel taux d'actualisation ?

4

Cout du capital

■ **Cout moyen pondéré du capital (CMPC) /Weighted average cost of capital (WACC):**

est le taux de rentabilité annuel moyen attendu, par les actionnaires et les créanciers, en retour de leur investissement. Le CMPC mesure ce que l'entreprise doit à tous ceux qui lui ont apporté des capitaux.

$$WACC = k_e \frac{E}{V} + k_d \frac{D}{V} (1 - t)$$

K_e : cout des fonds propres

K_d : cout de la dette avant impôt

t : taux d'imposition

E : Fonds propres

D : Dettes

V : Capitaux engagés ($D+E$)



Quel taux d'actualisation ?

4

Cout du capital

■ Modèle de marché (MEDAF / CAPM)

- $K_e = k_{rf} + \beta_i (k_m - k_{rf})$

- K_e : rendement attendu pour l'entreprise
- K_{rf} : Cout sans risque sur le marché (estimé par le rendement d'une obligation)
- β_i : coefficient de risque
- K_m : rendement du marché

- MEDAF : Modèle d'évaluation des actifs financiers
- CAPM : Capital asset pricing model



Quel taux d'actualisation ?

4

Cout du capital

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

La valeur de β dépend donc de la façon dont bouge le rendement du titre i par rapport au rendement du marché.



Quel taux d'actualisation ?

4

Exemples de cout du capital

LINK TO PRACTICE

Cost of Capital for Various Business Sectors

The Stern School of New York University has a Web site listing the cost of capital by business sector. The values provide you with a good feel for differences in the cost of capital across companies.

http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/wacc.htm

Some examples as of January 2005 are:

Aerospace/defense	7.07%
Apparel	7.23%
Auto parts	7.69%
Biotechnology	10.28%
E-commerce	18.14%
Entertainment	9.58%
Food wholesalers	6.64%
Grocery	6.31%
Semiconductor	16.24%
Wireless networking	13.58%