Fiche de Mathématiques

Contents

Part I
Notations et rappels

1 Rappels

Définition d'une fonction différentiable Dans un espace vectoriel normé (| . |), on dit que f est différentiable en a ssi $\forall h \in (V)(a)$ $\quad f(a+h) = f(a) + df_a + r_h$ où df_a forme linéaire et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|r(h)|}{|h|} = 0$

Convergence des séries de fonction Soit une suite de fonctions f_n de Ω, à valeurs dans un espace vectoriel normé (|.|). La série de fonction $\sum\limits_{n \leq 0} f_n$ converge :

1. simplement ssi la série $\sum\limits_{n \leq 0} f_n(x)$ converge pour tout x de Ω
2. absolument ssi la série $\sum\limits_{n \leq 0} |f_n(x)|$ converge pour tout x de Ω
3. uniformément ssi la série converge simplement et $\sup_x |\sum\limits_{n \leq p} f_n(x)| \xrightarrow{p \to +\infty} 0$

2 Notations

Mesure de Dirac On la note δx telle que si $x \in \Omega$, alors $\delta_x(A) = 1 \cdot (x \in A)$

La tribu des Boréliens La tribu notée $\mathscr{B}$ engendrée par les ouverts de R est appelée tribu borélienne.

Part II
Théorie de la mesure

1 Espaces mesurables

Définition d'une tribu Soit $\mathscr{F}$ une partie d'un ensemble Ω. On dit que $\mathscr{F}$ est une tribu de Ω si et seulement si

- $\Omega \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathscr{F}$
- Si $A \in \mathscr{F}$, alors $\mathrm{A}^c \in \mathscr{F}$ (Stabilité par complémentarité)
- Si $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{F}$ alors $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}$ (Stabilité par intersection dénombrable)

Exemple : $\{\emptyset,\Omega\}$ tribu triviale, $\mathscr{P}(\Omega)$ ensemble des parties de Ω

Définition d'espace mesurable C'est un couple $(\Omega, \mathscr{F})$ ou $\mathscr{F}$ est une tribu de ω.

Lemme : Stabilité par réunion dénombrable Si $\mathscr{F}$ tribu et si $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathscr{F}$, alors $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}$

Définition d'une tribu engendrée Elle se construit à partir d'une famille de parties C et est notée $\sigma(C)$. C'est la plus petite tribu contenant C. Elle vérifie $C \subset \sigma(C)$ et $\forall \mathscr{F}, (C \subset \mathscr{F} \Rightarrow \sigma(C) \subset \mathscr{F})$.
Exemple : La tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ est appelée tribu borélienne.

Egalité entre deux tribus engendrées Pour montrer que deux familles C et D engendrent la même tribu.

- Soit on montre que $C \subset \sigma(D)$ et $D \subset \sigma(C)$
- Soit si tous les éléments de C s'écrivent comme intersections, unions ou complémentaires d'éléments de D.

2 Mesure

Pour résumer, une mesure associe à un élément d'une tribu un nombre.
Définition d'une mesure positive $\nu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure positive si:

- $\forall A, \nu(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$
- Si $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{F}$ et si les A_i sont deux à deux distincts, alors $\nu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Remarque : On a toujours $\nu(\emptyset) = 0$

Mesure de Dirac Si $x \in \Omega$, alors $\delta_x(A) = 1 \cdot (x \in A)$

Mesure de Lebesgue Unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ telle que, pour tout intervalle fini $[a, b]$, $\lambda([a, b]) = b - a$

Définition d'un espace mesuré C'est un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \nu)$ ou $\mathscr{F}$ est une tribu sur Ω et ν une mesure.

Propriété des espaces mesurés

- Si $A \subset B$, alors $\nu(A) \leq \nu(B)$ *monotonie*
- Pour toute suite A_n, on a $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ *sous-additivité*
- Pour toute suite emboîtée $A_1 \subset A_2 \subset ...$, on a $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n)$ *continuité*
- Pour toute suite emboîtée $A_1 \supset A_2 \supset ...$ et $\nu(A_1) < +\infty$, on a $\nu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n)$ *continuité*

π-système & égalité de deux mesures

Définition d'un π-système C'est une famille d'ensembles $\mathscr{C}$ stable par intersection finie.
Remarque : une tribu est un π-système.

Théorème Soient ν et μ deux mesures définies sur $(\Omega, \mathscr{F})$ et $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$, un π-système. On suppose que $\forall C \subset \mathscr{C}$, $\nu(C) = \mu(C)$ et $\nu(\Omega) = \mu(\Omega)$ alors les deux mesures coïncident sur $\sigma(\mathscr{C})$.

Extension d'une mesure

Définition d'une algèbre ε_0 famille de parties de Ω vérifiant :

- $\emptyset \in \varepsilon_0$
- $A \in \varepsilon_0 \Rightarrow A^c \in \varepsilon_0$
- $A, B \in \varepsilon_0 \Rightarrow A \cap B \in \varepsilon_0$

Remarque : Les tribus sont des algèbres.

Définition fonction d'ensemble σ-additive ν définie sur ε_0 est σ-additive si pour toute réunion d'éléments $A_i \in \varepsilon_0$, disjoints deux à deux et $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \varepsilon_0$, alors $\nu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

Théorème d'extension de Carathéodory (p18 du poly) Soit Ω un ensemble et ε_0 une algèbre de Ω. Soit ν_0 une fonction d'ensemble σ-additive positive telle que $\mu_0(\Omega) < \infty$, alors $\exists! \nu$ sur $\sigma(\varepsilon_0), \nu = \nu_0$ sur ε_0.
On a étendu la mesure de l'algèbre à la tribu engengendrée par l'algèbre.

Définition de la tribu produit Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ et $(\Omega', \mathscr{F}')$
On appelle tribu produit de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ la tribu

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}' = \{A \times A', A \in \mathscr{F}, A' \in \mathscr{F}'\}$$

.
$(\Omega \times \Omega', \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}')$ est appelé espace produit mesurable. De même on a la mesure produit $\nu \otimes \nu'(A \times A') = \nu(A)\nu'(A')$

Part III
Intégrale de Lebesgue

1 Fonctions mesurable

Image réciproque Soient $(\Omega, \mathscr{F})$ et (E,ε) deux espaces mesurables Soit $f : \Omega \to E$
$\forall G \subset E, \forall \varepsilon \subset \mathscr{P}(E), [f \in G] \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(G)$ est un ensemble
$f^{-1}(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{[f \in G], G \in \varepsilon\}$ est une famille d'ensemble Remarque : si ε est une tribu alors $f^{-1}(\varepsilon)$ l'est aussi.

Définition d'une fonction mesurable f est dite $\mathscr{F}/\varepsilon$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\varepsilon) \subset \mathscr{F}$, càd $\forall A \in \varepsilon, [f \in A] \in \mathscr{F}$

tribu engendrée $\sigma(f) = f^{-1}(\varepsilon)$

fonction borélienne cas où $\mathscr{F}$ et ε sont des tribus boréliennes

Pour montrer que f est mesurable $\left.\begin{array}{r}(\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \varepsilon) \\ \varepsilon = \sigma(\mathscr{C}) \\ f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}\end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(\varepsilon) \subset \mathscr{F}$

Techniques pour montrer la mesurablilité

1. Si f est continue
2. Si f est une indicatrice
3. Si f, g, f_n sont mesurables, les fonctions obtenues par opéraions $(f + g, f * g, sup(f, g), |f|, \overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n, ...)$ sont aussi mesurables.(si f_n mesurable et converge simplement vers f, alors f est mesurable)
4. Retour à la définition

2 Intégrales des fonctions mesurables

Définition de l'intégrale des applications réelles mesurables Une application $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}})$ est dite intégrable par rapport à ν(ou ν-intégrable ou ν-sommable) ssi :

$$\left(\int f^+ d\nu < \infty \text{ et } \int f^- d\nu < \infty\right) \text{ ou, de façon équivalente, } \int |f| d\nu < \infty$$

le nombre réel
$$\int f d\nu = \int f^+ d\nu - \int f^- d\nu$$
est appelé intégrale de f (sur Ω) par rapport à ν.

Construction On construit d'abord les intégrales pour les fonctions étagées (qui prennent un ensemble fini de valeurs) positives, puis mesurables positives, puis enfin positives. On se place dans un espace mesuré.

Propriété pour les fonctions positives

- $(f \leq g) \Rightarrow \int f d\nu \leq \int g d\nu$ *monotonie*
- $\int \sum_k f_k d\nu = \sum_k \int f_k d\nu$ *Additivité*
- $\underline{\lim}_n \int f_n d\nu \geq \int (\underline{\lim}_n f_n) d\nu$ *Lemme de Fatou*
- Convergence monotone (f_n) suite croissante $\Rightarrow (\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\nu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\nu)$

Propriétés

- Linéarité
- si f mesurable et g ν-intégrable et $(|f| \leq g) \Rightarrow f\nu$-intégrable et $\int |f| d\nu \leq \int g d\nu$
- si f est ν-intégrable, alors $|\int f d\nu| \leq \int |f| d\nu$
- si f est ν-intégrable, alors $\nu([|f| = \infty]) = 0$

Théorème de Lebesgue ou Convergence Dominée Soient f_n, f et g des fonctions réelles mesurables et I un intervalle.
$$\left.\begin{array}{r} \forall n \leq 1, |f_n| \leq g \text{ presque partout sur } I, \\ \text{avec } \int_I |g| d\nu < \infty \\ \lim_n f_n = f \text{ presque partout} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_n \int_I f_n d\nu = \int_I \lim_n f_n d\nu = \int_I f d\nu$$

Part IV
Fonctions de variables complexes

1 Fonctions holomorphes et analytiques

On note $Re(f) = P$ et $Im(f) = Q$. On a f intégrable ssi P et Q intégrables.
Définition d'une fonction holomorphe Soit $a \in \Omega$, la fonction f est holomorphe en a ssi f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, i.e. $\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}^*} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.
Remarque : f est holomorphe sur Ω si elle l'est en tout point. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Condition de Cauchy f différentiable en $a = a_1 + ia_2$ ssi

- P et Q différentiables en (a_1, a_2)
- $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ au point $(x, y) = (a_1, a_2)$ *Conditions de Cauchy*

Propriétés de $\mathcal{H}(\Omega)$ stable par combinaisons linéaires, inverse et composition

Définition d'une fonction analytique La fonction f est dite analytique en $z_0 \in \Omega$ (qui est un ouvert de $\mathbb{C}$) ssi $\exists r > 0$,

1. $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$
2. $\forall z \in B(z_0, r), f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$

Pour résumer, fonction est analytique sur un ouvert ssi elle est développable en série entière dans un voisinage de chacun des points de l'ouvert.

Lien entre les fonctions analytiques et les fonctions holomorphes

Théorème analytique ⇒ holomorphe Soit $(\sum_{n\geq 0} c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ série entière de rayon de convergence $r \geq 0$, alors

1. La somme de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ est holomorphe sur $B(0, r)$,de dérivée $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$
2. La somme $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z - a)^n$ est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur son disque ouvert de convergence $B(a, r)$,ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.
3. $\forall p \in \mathbb{N}, c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$

Théorème holomorphe ⇒ analytique De Cauchy (p44 du poly) Soit f une fonction holomorphe sur Ω alors $f$est analytique sur Ω. De plus, si $B(z_0, r) \subset \Omega$ $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z - z_0)^n$ pour tout $z \in B(z_0, r)$ avec $c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath t}) e^{-\imath nt} dt$

Corollaire Formule de Cauchy De plus,avec les mêmes hypothèses, on a $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{\imath t}) re^{-\imath nt}}{z_0 + re^{\imath t} - z} dt$

Techniques pour montrer qu'une fonction est analytique

- Utiliser les formules de Cauchy
- Montrer que f est composée de fonctions holomorphes
- Montrer que f c'est analytique, i.e. développable en série entières au voisinage de chacun de ses points
- Revenir à la définition

Théorème du principe de prolongement analytique Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soient f, g deux fonctions analytiques sur U telles que

1. U connexe par arc (tout point de U est joignable par un chemin continu)
2. $\exists z_\infty \in U, \exists (z_n) \in U$
   - $z_n \to z_\infty$ sans prendre la valeur z_∞
   - $\forall n, f(z_n) = g(z_n)$

alors f et g coincident sur U.

2 Intégrale curviligne

Définition d'un chemin Application continue $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Le chemin représente l'ensemble des positions prises par les points de $\mathcal{C}$, sa dérivée est donc leur vitesse. C'est comme relier deux points d'un ensemble sans en sortir et sans lever sont crayon.
fermé (lacet) si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$

Pour un chemin $\mathcal{C}^1$, on définit la longueur $L(\gamma) = \displaystyle\int_\alpha^\beta |\gamma\prime(t)|dt$

Définition de l'intégrale curviligne $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, γ chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma\prime(t)dt$

3 Homotopie

Définition de l'homotopie Soient $\gamma_0, \gamma_1 : \Omega \subset \mathbb{C} \to [0,1]$ $\mathbb{C}^1_{pm}$, l'application $(s,t) \in [0,1] \otimes [0,1] \mapsto \Gamma_s(t)$ est une homotopie de γ_0 sur γ_1 si elle est continue à valeurs dans Ω, $\forall s \in [0,1], \Gamma_s$ est un lacet et $\Gamma_0 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 = \gamma_1$ (*condition aux bords*). On dit que γ_0 est Ω-homotope à γ_1.

Ω-homotope à zéro si $\exists a \in \Omega, \gamma$ Ω-homotope au lacet constant d'image $\{a\}$ γ_a.

Ω simplement connexe si connexe par arc ($\neq \emptyset$) et tout lacet est Ω-homotope à zéro.

Théorème important 1 <u>de Cauchy homotopique</u> $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, γ_0 γ_1 Ω-homotopes $\Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz$ En pratique, on utilise, pour $\gamma\Omega$-homotope à 0, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$

Théorème Si f est holomorphe sur Ω ouvert simplement connexe, alors f admet une primitive sur Ω.

Fonction logarithmique et puissances

Définition d'une détermination continue du logarithme sur $U \subset \mathbb{C}$: f continue et $\forall z \in U$, $exp(f(z)) = z$

Théorème $ln(z) :\left\{ \begin{array}{lcl} \Omega_\alpha = \{re^{\imath\theta} \in \mathbb{C}^*; \theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[\} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & ln(z) \overset{\text{def}}{=} lnr + \imath\theta \end{array} \right.$ est une détermination continue du logarithme.

Fonction puissance $z^\beta :\left\{ \begin{array}{lcl} \Omega_\alpha & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & exp(\beta ln(z)) \end{array} \right.$

4 Indice d'un point par rapport à un lacet orienté

Théorème et définition de l'indice soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $a \notin \gamma([0,1])$ alors son indice est un entier relatif, $Ind_\gamma(a) = \dfrac{1}{2\imath\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = \frac{1}{2\imath\pi} \int_0^1 \frac{\gamma\prime(t)}{\gamma(t) - a}dt$
En pratique, c'est le nombre de fois que le lacet tourne autour du point ! (Attention, c'est une valeur algébrique, orientée positivement dans le sens trigonométrique !)

5 Théorème des résidus

Séries de Laurent f holomorphe dans la couronne $z \in \mathbb{C}; r_1 < |z-a| r_2$ alors f est développable en série de Laurent de manière unique dans cette couronne : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ où $c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{\imath t}) e^{-n\imath t} dt$
En pratique on n'utilisera que c_{-1}.

Définition singularité isolée en a si $\exists r > 0, f$ holomorphe sur $B(a,r) \setminus \{a\}$. Résidu en a : $Res(f,a) = c_{-1}$

Théorème important 2 <u>Des Résidus</u>
Si

- Ω un ouvert simplement connexe
- f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ et γ ne passant pas par les $a_1, ..., a_n$

alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\imath\pi \sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(a_k) Res(f, a_k)$$

Singularités

a est une singularité de type :	Condition 1	OU Condition 2	Calcul du résidu
singularité factice	$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$	$\exists \lim_{z \to a} f(z)$	0
pôle d'ordre p	$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-a)^n$	$\exists \lim_{z \to a} (z-a)^p f(z)$	$= \frac{F(a)}{G\prime(a)}$ avec $f = \frac{F}{G}$
singularité essentielle	infinité de $c_{-p} \neq 0$	$\nexists \lim_{z \to a} (z-a)^p f(z)$	revenir à la définiton

Lemme de Jordan (culture) Soit f application continue sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, (γ_r) ($[\alpha_r, \beta_r] \to \mathbb{C}$) famille d'arcs de cercle paramétrés orientés de centre a et rayon r. Si $\forall t \in [0, 2\pi[$:

- $\lim_{r \to 0} (\gamma_r(t) - a) \times f \circ \gamma_r(t) \times \mathbf{1}_{]\alpha_r, \beta_r[}(t) = 0$ alors $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$
- $\lim_{r \to +\infty} (\gamma_r(t)) \times f \circ \gamma_r(t) \times \mathbf{1}_{]\alpha_r, \beta_r[}(t) = 0$ alors $\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$

Remarque : En pratique on montre $\lim_{r \to 0} (z-a) f(z) = 0$ et $\lim_{r \to +\infty} z f(z) = 0$

Part V
Espace de Hilbert

1 Définitions et premières propriétés

Définition d'un espace de Banach espace vectoriel normé complet (toute suite de Cauchy converge)

Définition d'un espace de Hilbert Espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$ et complet pour la norme associée $(\|.\|)$

Théorème important 3 Soit H un espace de Hilbert et (u_n) suite d'éléments de H deux à deux orthogonaux. On a $\sum_0^\infty u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_0^\infty \|u_n\|$ converge et $\sum_0^\infty \|u_n\|^2 = \|\sum_0^\infty u_n\|^2$

Théorème de projection sur un convexe fermé Γ partie convexe fermée de H, $\forall f \in H, \exists! g \in \Gamma$, appelé projection telle que la distance à f est minimum. On a $\forall h \in H, \mathcal{R}e(f-g|h-g) \leq 0$

Corollaire Supplémentaire orthogonal Soit F sous espace fermé de H. $F^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in F; \forall f \in F, (f|g) = 0\}$, supplémentaire de F, est un sous-espace fermé de H.

$$\forall h \in H, h = f + g, f \in F, g \in F^\perp projections$$

Définition d'un ensemble total F sous espace de H est total ssi $Vect(F)$ est dense dans H ou que le seul vecteur orthogonal à tous ses éléments soit le vecteur nul. *(critère de totalité)*

Théorème De Représentation de Riesz $\forall h$, on peut faire correspondre une unique forme linéaire $L_h = (f|g)$ et réciproquement.

Définition d'une base de H Si H espace de Hilbert, admet une famille dénombrable dense (c'est-à-dire est séparable), alors on définit une base hilbertienne comme suite (d'éléments 2 à 2 orthonormaux) qui constitue un système total dans H.

Théorème Dans tout H séparable, il existe des bases hilbertiennes.

Théorème Décomposition sur une base $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H (séparable)

- $f \in H, f = \sum_j c_j(f)e_j$, où $c_j(f) = (f|e_j)$ et $\|f\|^2 = \sum_j |c_j(f)|^2$ *(Bessel-Parseval)*
- Réciproquement, étant donné des scalaires γ_j, si $\sum_j |\gamma_j(f)|^2 < \infty$, la série $\sum \gamma_j e_j$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_j(f) = \gamma_j$

2 Convergence faible

Définition de la convergence faible (u_n) converge faiblement vers $u \in H$ si $\forall v \in H, (u_j|v) \xrightarrow{j\to+\infty} (u|v)$

Théorème Soit (u_j) suite d'éléments de h séparable, $\|u_j\| \leq M$, on peut en extraire une sous suite (v_j) qui converge faiblement vers v, $\|v\| \leq M$.

Part VI
Espaces fonctionnels classiques

1 Support d'une fonction

Notation $suppf = \overline{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}$.
C'est le plus petite ensemble fermé en dehors duquel f est nulle.

2 Espaces de fonctions bornées

est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$

3 Les espace $L\_\_$

Espace	Description (pour la relation d'équivalence $f = g$)	Norme et propriété
$L_1(\mathbb{R}^n)$	fonctions sommables	$\|.\|_1$ de Banach
$L_2(\mathbb{R}^n)$	fonctions de carré sommable	$\|.\|_2$ de Hilbert séparable
$L_\infty(\mathbb{R}^n)$	fonctions essentiellement bornées	$\|.\|_\infty$ de Banach

où $\|f\|_\infty = inf\{a; \int_{x,|f|(x)>a} dx = 0\}$
et si$A \subset \mathbb{R}_n$ de mesure finie,

$L_\infty(A) \subset L_2(A) \subset L_1(A)$ $L_\infty(A) \cap L_1(A) \subset L_2(A)$
Ou une fonction f est essentiellement bornées pour une mesure si $|f(x)| < M \in \mathbb{R}$ presque partout.

4 Séries de Fourier

L'espace L_T^2 , ensemble des fonctions T-périodque (presque partout) de carré sommable muni du produit scalaire $(f|g) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$ est un espace de Hilbert.

Théorème Les $e_p = e^{\imath p\omega t}, p \in \mathbb{Z}$ forment une base hilbertienne de L_T^2

Part VII
Transformation de Fourier

5 Transformée de Fourier d'une fonction de L_1

Définition d'une transformée de Fourier soit f une fonction de variable réelle. On appelle transformée de Fourier de f, si elle existe, la fonction complexe de la variable réelle ν :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \text{ pour tout } \nu \in \mathbb{R}$$

On écrira alors symboliquement :

$$\tilde{f}(\nu) = \mathcal{F}_{[f]} \text{ ou } \tilde{f}(\nu) = \mathcal{F}_{[f(x)]}$$

De même, on définira la transformée de Fourier conjuguée d'un fonction f par

$$\mathcal{F}_{[f]}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2i\pi\nu x}dx$$

La transformée de Fourier n'existe pas toujours, une condition suffisante mais non nécessaire pour que $\tilde{f}$ existe est que f soit Lebesgue-intégrable.
Note : ce sont des abus de notation.

Théorème Soit $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Alors $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée et $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Théorème La fonction transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathsf{L}_1(\mathbb{R}) \to \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire et continue :

1. pour tous $f,g \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ et tous $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathcal{F}_{[\alpha f + \beta g]} = \alpha\mathcal{F}_{[f]} + \beta\mathcal{F}_{[g]}$$

2. Si la suite f_n tend vers 0 au sens L_1, alors la suite $\tilde{f}$ tend vers 0 au sens L_∞ :

$$(\lim_{n\to\infty}\int |f_n(x)|dx = 0) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty}\sup_{\nu\in\mathbb{R}} |\tilde{f}_n(\nu)| = 0)$$

Théorème Lemme de Riemann-Lebesgue soit $f \in \mathsf{L}_1^{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable. Alors la fonction $\tilde{f}$ tend vers 0 en l'infini :

$$\lim_{|\nu|\to\infty}\int |\tilde{f}(\nu)|dx = 0$$

Théorème d'inversion dans $\mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ Soit $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable admettant une transformée de fourier $\tilde{f}$ elle-même intégrable. Alors :

$$\tilde{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(x) = f(x)\textbf{en tout point } x \textbf{ où } f \textbf{ est continue}$$

Lemme Soient f, $g \in \mathsf{L}_1^{\mathbb{R}}$. Alors, $\tilde{f}\cdot g$ et $f\cdot \tilde{g}$ sont intégrables et :

$$\int \tilde{f}(t)g(t)dt = \int f(t)\tilde{g}(t)dt$$

Théorème Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ et si f, $f\prime$ et $f\prime\prime$ sont toutes intégrables, alors $\tilde{f}$ est également intégrable. L'inversion de la transformée de Fourier devient possible et on a :

$$f = \tilde{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}$$

Théorème soit $f \in \mathsf{L}_1^{\mathbb{R}}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points de discontinuités, telle que $f\prime \in \mathsf{L}_{\mathbb{R}}$,alors :

$$\lim_{\mathbb{R}\to\infty} \int_{-\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \tilde{f}(\nu)e^{2\imath\pi\nu x}d\nu = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$$

6 Propriétés de la transformée de Fourier

Théorème Si f est une fonction intégrable et si $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathcal{F}_{\overline{[f(x)]}} = \overline{\tilde{f}(-\nu)} \qquad \mathcal{F}_{[f(-x)]} = \bar{\mathcal{F}}_{[f(x)]} = \tilde{f}(-\nu)$$

$$\mathcal{F}_{[f(x-a)]} = e^{-2\imath\pi\nu a}\tilde{f}(\nu) \qquad \mathcal{F}_{[f(x)e^{2\imath\pi\nu_0 x}]} = \tilde{f}(\nu - \nu_0)$$

De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\mathcal{F}_{[f(ax)]} = \frac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Théorème Soit f tel que la fonction $x^k f \in \mathsf{L}_1$ pour tout $k = 0, ..., n$. Alors $\tilde{f}$ est n-fois dérivable et on a :

$$\mathcal{F}_{[(-2\imath\pi x)^k f(x)]}(\nu) = \tilde{f}^{(k)}(\nu) \text{ pour } k = 1, ..., n$$

Corollaire Si $f \in \mathsf{L}_1$ est une fonction à support bornée, alors sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Corollaire Soit f une fonction et soient $p, q \in \mathbb{N}$. On suppose que la dérivée p-ième de f est dans L_1 et que $x \mapsto x^q f(x)$ est dans L_1. Alors, pour tout $\nu \in \mathbb{R}$,

$$|\tilde{f}(\nu)| \leq \int |f^{(p)}(x)|dx \text{ et } |\tilde{f}^{(q)}(\nu)| \leq \int |2\pi x|^q |f(x)|dx$$

Définition de fonction à décroissance rapide On dit qu'une fonction f est à décroissance rapide ssi pour tout $k \geq 0$.

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^k f(x)| = 0$$

Théorème Si f est une fonction à décroissance rapide, alors sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Théorème Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$ est dans L_1 alors $\tilde{f}$ est à décroissance rapide.

7 Transformée de Fourier d'un fonction de L_2

Définition des espaces de Schwartz on note S l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Théorème La transformée de Fourier est un opérateur linéaire et continu de S dans S. En d'autres termes, si $f \in S$ alors $\tilde{f} \in S$ et si la suite f_n tend vers 0 dans S alors la suite $\tilde{f}_n$ tend également vers 0 dans S.

Définition de la convergence dans S Soit $f \in S$. On dit que la suite f_n d'éléments de S converge dans S vers f ssi pour tous p, $q \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^p |f_n^{(q)}(x) - f^{(q)}(x)| = 0$$

Théorème La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective et continue ainsi que sa réciproque, de S dans S. Son inverse est $\mathcal{F}^{-1}[.] = \mathcal{F}_{[.]}$.

Lemme de la Densité de S dans L_2 l'espace S est un sous espace vectoriel dense de l'espace $\mathsf{L}_2(\mathbb{R})$.

Théorème de Parseval-Plancherel La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{[.]}$ est une isométrie sur L_2: si f et f sont deux fonctions de L_2 alors $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ le sont aussi et on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu)\overline{\tilde{g}(\nu)}d\nu$$

8 Transformée de Fourier et convolution

Définition du produit de convolution Si f et g sont deux fonctions localement sommables, leur produit de convolution, lorsqu'il existe, est $h = f * g$ avec :

$$h(x) = \int f(t)g(x-t)dt$$

Théorème Soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Fourier et telle que leur produit de convolution existe et est dans L_1. Alors :

$$\mathcal{F}_{|f*g|} = \mathcal{F}_{|f|}.\mathcal{F}_{|g|} \text{ ou encore } f \tilde{*} g(\nu) = \tilde{f}(\nu).\tilde{g}(\nu)$$

Théorème

1. si f et $g \in \mathsf{L}_1$ alors $f \tilde{*} g(\nu) = \tilde{f}.\tilde{g}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$
2. si f et $g \in \mathsf{L}_1$ et que leur transformées de Fourier sont également dans L_1 alors $f\tilde{.}g(\nu) = \tilde{f} * \tilde{g}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$
3. si f et $g \in \mathsf{L}_2$, on peut prendre la transformée inverse de la première formule et écrire $f * g(t) = \tilde{\bar{\mathcal{F}}}_{[\tilde{f}.\tilde{g}]}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qui est un bon moyen de calculer $f * g$; de plus, la seconde formule reste valable : $f\tilde{.}g(\nu) = \tilde{f} * \tilde{g}(\nu)$
4. si $f \in \mathsf{L}_1$ mais que $g \in \mathsf{L}_2$ alors $f * g(t) = \tilde{\bar{\mathcal{F}}}_{[\tilde{f}*\tilde{g}]}(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Part VIII
Les Distributions

9 Espace $\mathcal{D}$

Définition de l'espace $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$ est l'espace des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$ indéfiniement dérivables, à support borné.

Propriétés de $\mathcal{D}$ On peut montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel **de dimension infinie**. Par ailleurs, on a facilement les deux propriétés suivantes :

1. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors sa dérivée $\varphi\prime \in \mathcal{D}$.
2. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est indéfiniment dérivable, alors $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$. En effet, $\alpha\varphi$ est indéfiniment dérivable et $supp(\alpha\varphi) \subset supp(\varphi)$.

Définition de la convergence dans $\mathcal{D}$ Une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ (et on note $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$) lorsque $n \to \infty$ ssi :

1. Il existe un ensemble borné B de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $supp\varphi_n \subset B$.
2. Pour tout entier $k \geq 0$, la suite des dérivées $\varphi_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ pour $n \to \infty$ vers la dérivée correspondante $\varphi^{(k)}$. Ce qui s'écrit aussi : pour tout $k \geq 0$,
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| \to_{n\to\infty} 0$$

10 Distribution. Espace $\mathcal{D}'$

Définition d'une Distribution Une distribution des une **forme linéaire continue** sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$. (cf p83 pour vérifier qu'une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ est une distribution)

Théorème Deux fonctions localement intégrables f et g définissent la même distribution régulière ssi elles sont égales presque partout.
$$T_f = T_g \iff f = g \text{ p.p}$$

Lemme Si f et g sont deux fonctions continues, telles que $T_f = T_g$ alors $f = g$.

Vérifier qu'une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ est une distribution. On considére une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ et nous allons montrer que $< T, \varphi_n > \to 0$. Dire que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ signifie simplement que $\varphi_n \in \mathcal{D}$ et :

1. $supp\varphi_n \subset B$ où B est un certain ensemble borné.
2. Pour tout $k \geq 0$,
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t)| \to_{n\to\infty} 0$$

Nous utilisons ces deux propriétés sur φ_n pour montrer que $< T, \varphi_n >$ converge bien vers 0.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable, i.e. pour tous $a < b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b |f(t)|dt < \infty$. A la fonction f est associé une distribution qu'on notera T_f définie par :

$$< T_f, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \quad (\varphi \in D)$$

φ étant nulle en dehors d'un ensemble B. On a alors :

$$| < T_f, \varphi_n > | = \left| \int_R f(t)\varphi_n(t)dt \right| \leq \int_B |f(t)||\varphi_n(t)|dt \leq \left[\int_B |f(t)|dt \right] \times \left[\sup_{t\in B} |\varphi_n(t)| \right]$$

et comme $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ on tire que $sup_{t\in\mathbb{R}}|\varphi_n(t)| \to 0$ ce qui montre que $< T_f, \varphi_n > \to 0$. Donc T_f est une distribution.

11 Opérations sur les distributions

Définition de la dérivée d'une distribution Pour toute distribution T, on définit la distribution T' et on l'apperlera distribution dérivée de T par :

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' > \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}$$

Multiplication des distributions En général on ne peut pas multiplier des distributions entre elles. Mais si α est indéfiniment dérivable et si $\varphi \in \mathcal{D}$, on définira la distribution αT par :

$$< \alpha T, \varphi >=< T, \alpha\varphi >$$

Définition de la translation d'une distribution Soit $T \in \mathcal{D}'$. On définit la translatée de T qu'on notera $\mathcal{T}_\alpha T$ par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad <\mathcal{T}_\alpha\, T, \varphi >=< T, \mathcal{T}_{-\alpha}\, \varphi >$$

On utilisera la notation $((\mathcal{T}_b\varphi)(x) = \varphi(x - b) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Définition de l'homothétie d'une distribution Soit $T \in \mathcal{D}'$. On définit l'homothétique de T de facteur $\lambda \in \mathbb{R}^*$ qu'on notera T_λ par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \qquad < T_\lambda, \varphi >= \frac{1}{|\lambda|} < T, \varphi_{1/\lambda} >$$

Définition de la partié d'une distribution Soit $T \in \mathcal{D}'$. On dit que T est paire ssi $T_{-1} = T$, impaire ssi $T_{-1} = -T$.

12 Support d'un distribution

On peut dire que le support d'une distribution T est le plus petit fermé telle que T est nulle sur son complémentaire.

13 Convergence dans $\mathcal{D}'$

Définition de la convergence d'un distribution Une suite de ddistributions $T_n \in \mathcal{D}'$ converge vers une distribution $T \in \mathcal{D}$ lorsque $n \to \infty$ (et on note $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$) ssi pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi >=< T, \varphi >$$

Proposition Si $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ alors :

1. $T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$ quand $n \to \infty$.
2. Pour toute fonction α de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\alpha T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \alpha T$ quand $n \to \infty$
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}, \mathcal{T}_a\, T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathcal{T}_a\, T$ quand $n \to \infty$

Théorème Si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}, \lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi >$ existe, alors l'application définie sur $\mathcal{D}$,

$$\varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi >$$

définit une distribution et on notera $< T, \varphi >= \lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi >$. De plus, $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ quand $n \to \infty$.

Théorème Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Il existe une fonction $g \geq 0$ telle que rpesque partout pour x, on a $|f_n(x)| \geq ng(nx)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = 1$.

alors $T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$.

14 Distributions tempérées

Définition de l'espace S Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartient à S ssi

1. φ est indéfiniment dérivable.
2. Pour tout entier $k \geq 0$, et tout entier $h \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k \varphi^{(h)}(x)$ est bornée.

Proptiétés de S

1. Pour tous $\varphi, \psi \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $\alpha\varphi + \beta\psi \in S$ et $\varphi\psi \in S$.
2. Soient $\varphi \in S, P$ un polynôme et R une fraction retionnelle sans pôle sur $\mathbb{R}$, alors $P_\varphi \in S$ et $R_\varphi \in S$.
3. Plus généralement, si l'on définit l'espace vectoriel O_M des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente par : on dit qu'une fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dans O_M ssi pour tout k, la dérivée k-ième de α qu'on notera $\alpha^{(k)}$ est majorée par un polynôme (dont le degré peut dépendre de k). Alors, si $\alpha \in O_M$ et $\varphi \in S$ alors $\alpha\varphi \in S$.
4. S est stable par dérivation et translation : si $\varphi \in S$ alors $\varphi' \in S$ et $\tau_a\varphi \in S$ alors $\alpha\varphi \in S$.

Définition de la convergence dans S On dit que la suite φ_n d'éléments de S converge dans S vers $\varphi \in S$, et on note $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi$ ssi pour tous p, $q \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^p |\varphi_n^{(q)}(x) - \varphi^{(q)}(x)| = 0$$

Définition d'une distribution tempérée Une distribution tempérée T est une forme linéaire et continue sur S. L'ensemble des distributions tempérées sera notée S'.

Lemme T est une distribution tempérée ssi

1. T est une forme linéaire
2. si $\varphi_n \xrightarrow{S} 0$ alors
$$\lim_{n\to\infty} < T, \varphi_n > \to 0$$

Définition de la multiplication dans S' Si $\alpha \in O_M$ et $T \in S'$ alors αT définie par :

$$< \alpha T, \varphi > = < T, \alpha\varphi > \qquad (\varphi \in S)$$

est une distribution appelée distribution produit de T par α.

Définition de la convergence dans S' Une suite T_n de S' converge vers $T \in S'$ et on note $T_n \xrightarrow{S'} T$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi > = < T, \varphi > \qquad (\varphi \in S)$$

15 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition d'une transformée de Fourier d'une distribution tempérée Si T est une distribution tempérée, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}_{[T]}$ est définie par :

$$< \mathcal{F}_{[T]}, \varphi >=< T, \mathcal{F}_{[\varphi]} > \qquad (\varphi \in S)$$

La fonction ainsi définie sur S est continue, est un élément de S' :

$$\text{Si } T \in S' \text{ alors } \mathcal{F}_{[T]} \in S'$$

Propriétés de la transformation de Fourier dans S'

Proposition :

1. $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont linéaires dans S'.
2. $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont deux bijections réciproques, l'une de l'autre de S' dans lui même.
3. $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont continues dans S'.

En résumé, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dans S' est un homéomorphisme linéaire de S' dans lui-même dont l'inverse est $\tilde{\mathcal{F}}$

Proposition sur la dérivation Pour tout $T \in S'$, on a :

$$\mathcal{F}_{[T']} = 2\imath\pi x \mathcal{F}_{[T]}$$
$$(\mathcal{F}_{[T]})^{(m)} = \mathcal{F}_{[(-2\imath\pi t)^m T]}$$

Autrement dit, on a des formules identiques à celles déjà obtenues pour les fonctions et au facteur 2π près, la transformation de Fourier échange la dérivation en la multiplication par la variable.

Proposition sur la translation Pour tout $T \in S'$ et tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}_a \mathcal{F}_{[T]} = \mathcal{F}_{[e^{2\imath\pi a t} T]}$$
$$\mathcal{F}_{[\mathcal{T}_a T]} = e^{-2\imath\pi a x} \mathcal{F}_{[T]}$$

Proposition sur la transformée de Fourier de δ On a les deux propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F}_{[\delta]} = \tilde{\mathcal{F}_{[\delta]}} = 1$ et $\mathcal{F}_{[1]} = \tilde{\mathcal{F}_{[1]}} = \delta$
2. Pour tout $m \geq 0, \mathcal{F}_{[\delta^{(m)}]} = (2\imath\pi x)^m$ et $\mathcal{F}_{[\delta^{(m)}]} = (-2\imath\pi x)^m$

Part IX
Transformation de Laplace

1 Définition et sommabilité

Définition d'une fonction causale $t \mapsto f(t) = 0$ si $t < 0$

Définition de la transformée de Laplace (unilatérale) Soit f réelle ou complexe, localement sommable. On note la transformée de Laplace $\hat{f}(p) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$

Définition de la transformée de Laplace (bilatérale) $p \mapsto \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$

Définition d'original fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ localement sommable, causale, et ne croit pas plus vite qu'une exponentielle ($|f(t)| \leq Me^{st}$).
$\hat{f}$ est l'image de l'original. (on note $f(t) \sqsupset F(p)$)

2 Sommabilité

Définition de l'abscisse de sommabilité d'une fonction originale : $\alpha = inf\{x \in \mathbb{R}, t \mapsto |f(t)|e^{-xt}\text{est intégrable}\}$
En $x = \alpha$, on ne sait pas si $f(t)e^{-xt}$ est intégrable, mais on peut écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \lim_{R\to\infty, R'\to\infty} \int_{R'}^{R} f(t)e^{-pt}dt$ pour les valeurs de p où cette limite exsite.

Théorème Dans le demi plan ouvert de sommabilité, la transformée de Laplace de $\hat{f}$ est holomorphe donc analytique.

Proposition f original

- Si $f(t)$ est à support borné à droite alors $\alpha = -\infty$
- Si $f(t)$ est à décroissance rapide, alors $-\infty < \alpha < 0$ et $\hat{f}(p)$ holomorphe dans un demi-plan qui contient l'axe $\imath\mathbb{R}$
- Si $f(t)$ est tempérée, alors $\alpha = 0$ et sa transformée de Laplace n'existe pas forcément au sens des fonctions mais existe au sens des distributions.
- Si $f(t)$ est à décroissance rapide, alors $-0 < \alpha \leq \infty$ alors $\hat{f}$ holomorphe dans un demi-plan ne contenant pas l'axe $\imath\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier n'existe pas.

Propriété de la transformée Soient $f(t)$ original et $\hat{f}(p)$ son image. Si $x > \alpha$ alors $f(x + \imath\omega) \xrightarrow{\omega\to\infty} 0$

3 Inversion

Théorème D'inversion de la transformée de Laplace Soient f original et et $\hat{f}$ son image. Formule d'inversion valable en tout point de continuité de f : $f(t) = \dfrac{1}{2\imath\pi}\int_{x_0-\imath\infty}^{x_0+\imath\infty} \hat{f}(p)e^{pt}dp$ où $x_0 > \alpha$

4 Propriétés élémentaires

Théorème pour la convolution f et g originaux d'abscisse de sommabilité α et α'

Si	$f(t) \sqsupset F(p)$	pour $x > \alpha$
et	$g(t) \sqsupset G(p)$	pour $x > \alpha'$
alors	$[Hf * Hg](t) \sqsubset F(p)G(p)$	pour $x \max(\alpha, \alpha')$
et aussi	$f(t)g(t) \sqsubset \dfrac{1}{2\imath\pi}\int_{x_0-\imath\infty}^{x_0+\imath\infty} F(s)G(p-s)ds$	pour $\alpha < x_0$ et $(\alpha + \alpha') < x_0$

Théorème pour la dériavation Si f original contnu et dérivable, si sa dérivée est un original, alors en notant $f(t) \sqsupset F(p)$, la transformée de Laplace de la dérivée de f au sens des fonctions est donnée par $H(t)\dfrac{d}{dt}f(t) \sqsubset pF(p) - f(0_+)$ avec la même abscisse de sommabilité.
De même, $H(t)\dfrac{d^n}{dt^n}f(t) \sqsubset p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - ... - f(0^+)$

Théorème réciproque Si $f(t)$ original alors $t^nf(t)$ original de même abscisse. Si $f(t) \sqsupset F(p)$, alors $t^nf(t) \sqsupset \dfrac{d^n}{dt^n}F(p)$

Théorème d'intégration

Si	$f(t) \sqsupset F(p)$ pour $x > \alpha$
alors	$\displaystyle\int_0^t f(u)du \sqsubset \frac{F(p)}{p}$ pour $x > max(\alpha, 0)$

Théorème réciproque Si $f(t)$ original,$f(t) \sqsupset F(p)$, alors $\displaystyle\frac{f(t)}{t} \sqsupset \int_p^{\infty} F(z)dz$ pour $x > sup(\alpha, 0)$52