

# Analyse Numérique

## Contents

<b>I</b>	<b>Solution approchées de certaines équations différentielles</b>	<b>2</b>
1	Méthode des différences finies	2
2	Méthode des éléments finis	2
3	Conditionnement d'un système linéaire	3
<b>II</b>	<b>Méthodes stochastiques de calcul numérique</b>	<b>3</b>
1	Vocabulaire	3
2	Les méthodes de Monte-Carlo	4
3	Méthode de la répartition inverse	4
4	Méthode de l'acceptation rejet	4



## Part I

# Solution approchées de certaines équations différentielles

## 1 Méthode des différences finies

**Objectif :** transformer une équation "continue" en  $N$  équations à  $N$  inconnues discrètes.

**Méthode générale en 1D** On a un problème

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

### En pratique

**Principe :** On va créer un maillage de pas  $h = \frac{1}{N+1}$ . On dispose donc d'un ensemble  $(x_i = ih)_{i=0..N+1}$  appelés noeuds. On va calculer une approximation de la solution  $\phi$  du problème en ces noeuds. On note  $u_i = u(x_i)$

**Technique générale en dimension 1 :**

- Formule de Taylor :  $u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i + o(h^2)$  et  $u_{i-1} = u_i - hu'_i + h^2u''_i + o(h^2)$
- On obtient donc  $u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$  et  $u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$
- On remplace dans l'équation pour obtenir le problème

$$(\mathcal{P}_h) : \begin{cases} -\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) + c(ih)u(ih) = f(ih), 0 \leq i \leq 1 \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

- On peut aussi mettre le problème sous forme matricielle.  $A\vec{u} = h^2\vec{w}$  où  $\vec{w}$  contient les  $f_i$  et les conditions initiales si besoin.

### Problème variationnel

- Soit un espace de Hilbert  $E$  doté d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme associée  $\|\cdot\|$ .
- une forme bilinéaire  $u, v \mapsto a(u, v)$  continue sur  $E \times E$
- une forme linéaire  $v \mapsto L(v)$  continue sur  $E$

Trouver  $u \in E$  tel que  $\forall v \in E, a(u, v) = L(v)$  est appelé un problème variationnel. De plus, d'après le lemme de Lax-Milgram, si  $a$  est coercitive ( $\exists \alpha > 0, \forall v \in E, a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$ ) alors le problème admet une solution unique dans  $E$ .

## 2 Méthode des éléments finis

On considère  $K$  une partie compacte  $\mathbb{R}^2$ , connexe et d'intérieur non vide.  $\Sigma = \{s_j\}_{j=1}^N$  un ensemble fini de  $N$  points distincts de  $K$  et  $P$  un espace vectoriel de dimension finie et composé de fonctions définies sur  $K$  à valeurs réelles.

**Definition**  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant si et seulement si étant donné  $N$  réels quelconques  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  il existe une unique fonction  $p$  de  $P$  telle que  $p(s_j) = \alpha_j$  pour  $1 \leq j \leq N$ .

**Elements finis de Lagrange** Le triplet  $(K, P, \Sigma)$  est dit élément fini de Lagrange si  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant.



**Fonctions de forme** Etant donné un élément fini de Lagrange  $(K, P, \Sigma)$ , on appelle fonctions de forme les  $N$  fonctions notées  $p_1, \dots, p_N$  vérifiant  $p_i(s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

**En pratique :**

- Première méthode : vérifier que  $\dim(P) = \text{Card}(\Sigma) = N$  et que la seule fonction de  $P$  qui s'annule sur  $\Sigma$  est la fonction identiquement nulle
- Deuxième méthode : vérifier que  $\dim(P) = \text{Card}(\Sigma) = N$  et exhiber toutes les fonctions de base  $p_i$
- revenir à la définition de l'unisolvance et résoudre le système d'équations  $p(s_j) = \alpha_j$

**Conditions aux limites**

**Condition de Dirichlet** On a, par exemple, le premier terme  $u(0)$ . On le retrouve donc dans la forme matricielle à la première ligne.

**Condition de Cauchy** On a une condition plus complexe. On peut soit utiliser la méthode du noeud fictif en créant un point et en appliquant la condition en ce point. On peut aussi l'appliquer sans noeud fictif, ce qui est plus rapide mais moins précis.

**Définition (Triangularisation)** Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$  et  $\bar{\Omega}$  son adhérence. On considère une décomposition  $\Phi_h$  finie du domaine telle que :

- $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \Phi_h} K$
- chaque élément  $K$  de  $\Phi_h$  est un triangle de  $\mathbb{R}^2$
- les intérieurs de deux triangles de  $\Phi_h$  distincts sont disjoints
- tout côté d'un triangle est soit un côté d'un autre triangle, soit une partie de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$

Alors  $\Phi_h$  est appelé triangularisation de  $\Omega$ .

En bref, on partitionne un ouvert avec un nombre fini de triangles. L'espace formé est de dimension fini et appelé  $E_h$  dans la suite.

**Construction d'une base de  $E_h$**  On construit les  $\phi_i$ , pour  $1 \leq i, j \leq I$ ,  $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}$

**En pratique :** On va multiplier par une fonction  $v$  puis réaliser une IPP pour avoir des fonctions  $a$  et  $L$  contenant une intégrale (donc correspondant à la définition).

### 3 Conditionnement d'un système linéaire

Le conditionnement mesure l'écart lorsque l'on perturbe la matrice  $A$  (problème sous forme matriciel). On note  $\text{cond}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \|A\| \|A^{-1}\|$  et  $= \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$  si  $A$  est normale (si  $A^H$  est la transposée conjuguée,  $AA^H = A^H A$ ) où les  $\lambda$  sont les valeurs propres. Un problème bien conditionné donne  $\text{cond}(A) = 1$ , plus il est grand, moins il est bien conditionné.

## Part II

# Méthodes stochastiques de calcul numérique

Permet la résolution de problèmes déterministes dont les calculs sont trop lourds, d'où l'approximation.

## 1 Vocabulaire



Simuler suivant une loi de proba est une démarche stochastique qui nécessite un tirage aléatoire. Cela consiste à choisir aléatoirement une valeur en respectant sa loi. Ça n'a rien à voir avec le fait de faire des calculs à partir de la loi. Cela ne signifie pas non plus de prendre la valeur la plus probable.

## 2 Les méthodes de Monte-Carlo

**Définition** On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés stochastiques.

**La loi Forte des grands nombres** (cf pougne proba) Une moyenne de v.a. converge vers un réel : l'espérance. C'est à dire on passe de l'aléatoire au déterminisme (cf le calcul de l'aire d'un lac)

## 3 Méthode de la répartition inverse

Cf pougne de proba. On veut simuler  $X \sim F_X$ . On simule  $u \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$  et on obtient  $y = F_X^{-1}(u)$ . Ceci n'est possible que si  $F$  est inversible.

## 4 Méthode de l'acceptation rejet

$f$  et  $g$  deux densités. On sait simuler selon  $g$  mais pas selon  $f$ . On a  $f(x) \leq M g(x)$ ,  $\frac{1}{M}$  probabilité d'acceptation.

- On tire  $z$  selon  $g$
- On tire  $u \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ 
  - si  $u \leq \frac{f(z)}{Mg(z)}$ , alors  $x = z$ , tiré suivant  $f$
  - sinon on recommence